

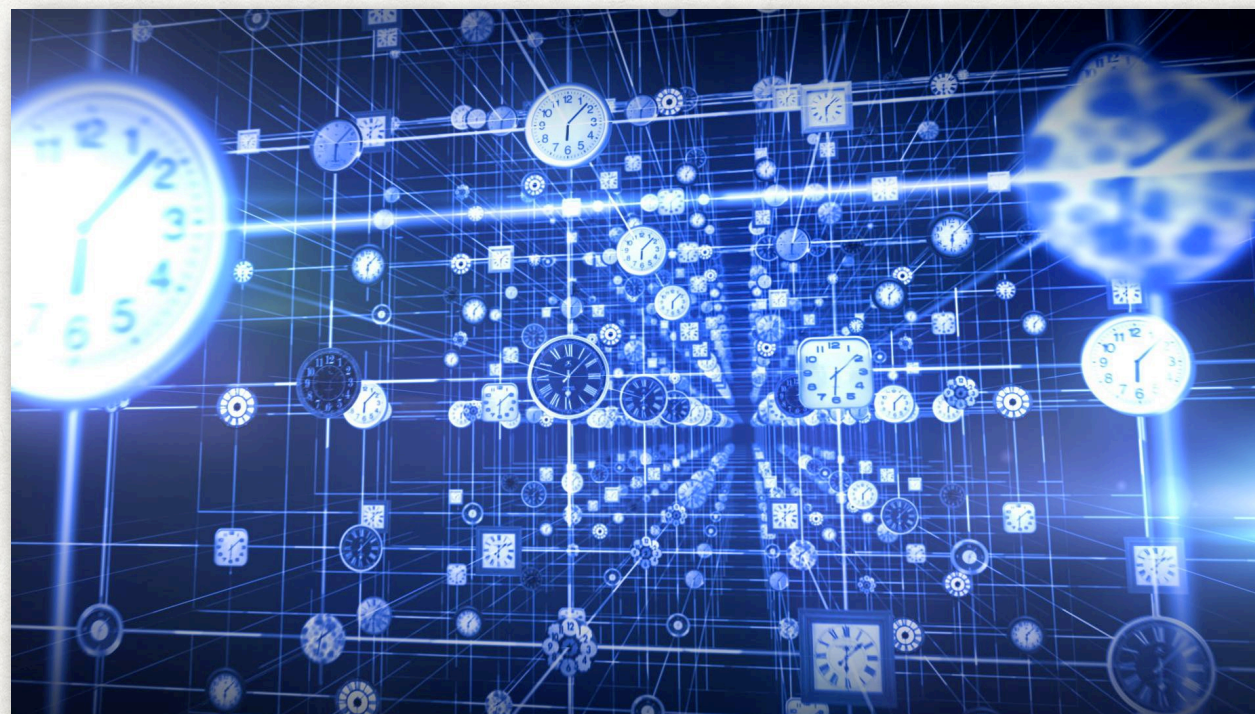
FÍSICA II

MÓDULO III: INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE ESPECIAL

4302112 – IF/USP – PROF. RAUL ABRAMO

AULA 14 - 02/10/2020

- Dinâmica relativística
- Exemplos e aplicações
- Colisões e espalhamentos
- Um pouco de Física Nuclear
- A kilonova GW170817



4-VELOCIDADE

- Vimos na aula passada que um corpo em movimento, que executa uma **trajetória** X^μ **no espaço-tempo**, possui uma **4-velocidade**:

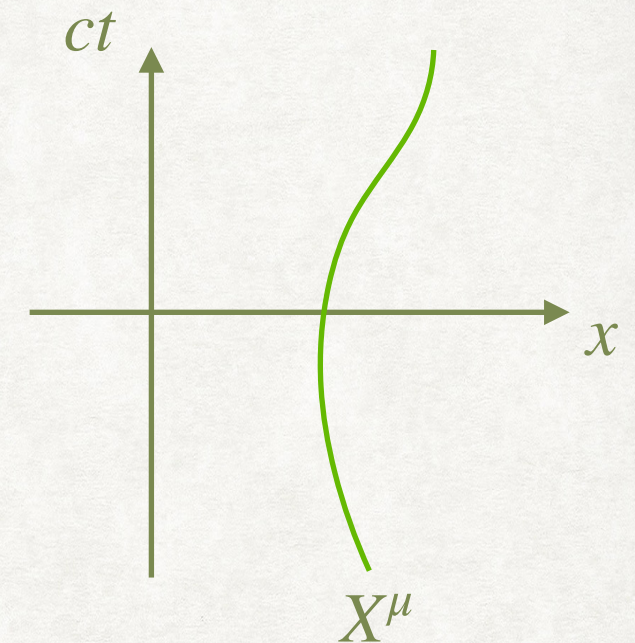
$$U^\mu = \frac{d}{d\tau} \{ct, x, y, z\} = \left\{ \frac{d(ct)}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right\} = \left\{ \frac{d(ct)}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right\}$$

- Vimos que, usando a relação entre o tempo próprio do corpo em movimento e o tempo do sistema de coordenadas, $d\tau = dt/\gamma(v)$, onde $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ é a velocidade do corpo medida pelo referencial, obtemos que:

$$U^\mu = \left\{ \gamma c, \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} \right\} = \gamma \{c, \vec{v}\}$$

- Também vimos que a **norma de Minkowski** desse 4-vetor é um invariante:

$$||U||^2 = \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = (U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2 = c^2$$



Geometria de Minkowski:

$$||A||^2 = (A^0 \ A^1 \ A^2 \ A^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

Métrica de Minkowski: $\eta_{\mu\nu}$

4-MOMENTO

- Também vimos que o **momento** tem que ser **generalizado** para um **4-momento**:

$$p^\mu = m U^\mu = m \gamma(v) \{c, \vec{v}\} ,$$

de tal forma que a componente $p^0 = E/c$ é a **energia da partícula** (a menos do fator c , que simplesmente converte a energia para as unidades de momento). **Ou seja**, $E = m\gamma c^2$.

- A norma de Minkowski do 4-momento é o chamado **invariante de massa**:

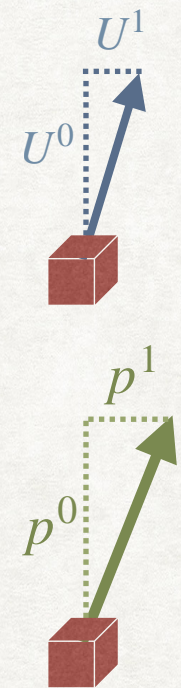
$$||p||^2 = m^2 ||U||^2 = m^2 c^2$$

- Além disso, vimos que expandindo a energia no limite não-relativístico obtemos:

$$E = mc^2 \gamma \simeq mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \dots$$

- Temos, portanto, que mc^2 indica a **energia de repouso** da partícula, e portanto a **energia cinética** é dada por:

$$K = E - mc^2 = mc^2 (\gamma - 1)$$



Energia
cinética!

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO DA LUZ

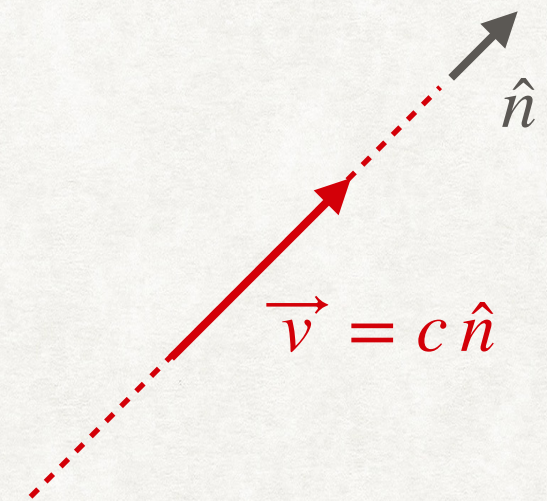
- A luz é um caso peculiar, porque a sua velocidade é c e portanto não existe nenhum referencial físico que se mova com ela — e assim, γ não está definido.
- Além disso, a massa da luz é nula.
- De fato, qualquer partícula de *massa nula* se comporta como a luz — ou seja, se move com *velocidade* c .
- Nesse caso temos que:

$$U_{luz}^{\mu} = \{c, c\hat{n}\} \quad , \quad \text{ou equivalentemente, } ||U_{luz}||^2 = 0 \text{ .}$$

- A *luz* tem, claro, *energia e momento*, mas os dois são *vinculados*:

$$p_{luz}^{\mu} = \left\{ \frac{E_{luz}}{c}, \frac{E_{luz}}{c} \hat{n} \right\} \quad , \quad \text{ou seja, } |\vec{p}_{luz}| = \frac{E_{luz}}{c} \text{ .}$$

Ou seja, no caso de partículas sem massa temos apenas dois graus de liberdade: a energia E_{luz} , e a direção da partícula $\hat{n}$.



A luz (ondas eletromagnéticas) ainda possui outros graus de liberdade que não entram nas equações dinâmicas: a polarização da onda — ou seja, a direção na qual oscilam os campos elétricos dessa onda.

LEIS DE CONSERVAÇÃO

- Na ausência de forças externas pode-se mostrar que o 4-momento total de um sistema de partículas se conserva:

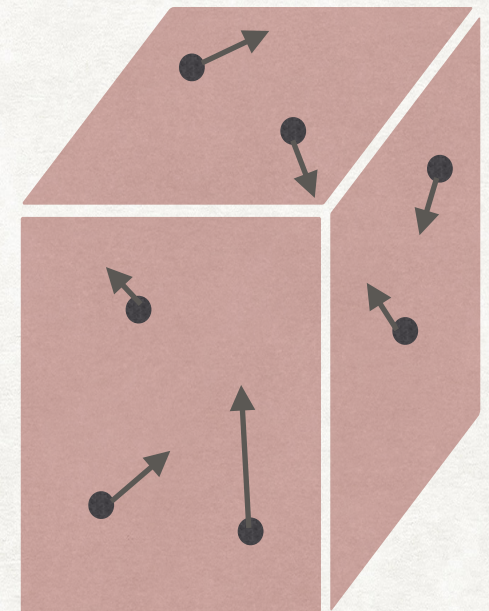
$$P^\mu = \sum_n p_{(n)}^\mu = \text{const.}$$

- Isso significa, ao mesmo tempo:

→ **Conservação de energia** : $E_{tot} = P^0 = \sum_n m_{(n)} c^2 \gamma_{(n)}$

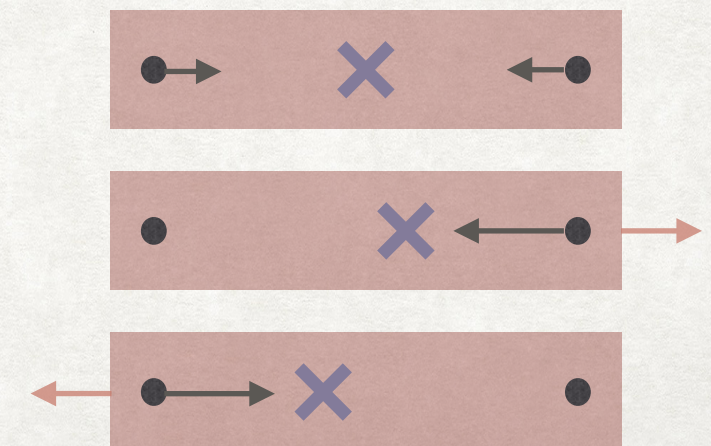
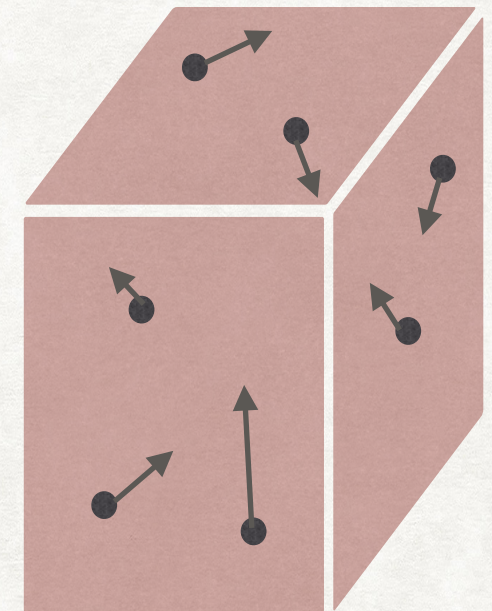
→ **Conservação de momento** : $\vec{P}_{tot} = \sum_n m_{(n)} \gamma_{(n)} \vec{v}_{(n)}$

onde $\gamma_n = \gamma(v_{(n)})$



O CENTRO DE MASSA

- Na mecânica clássica Newtoniana um dos conceitos auxiliares mais utilizados é o do *Centro de Massa*.
- Esse conceito é útil por causa do *referencial do centro de massa*, no qual temos que $\vec{P} \rightarrow 0$. E para deixar as coisas mais claras, geralmente identificamos a *origem desse referencial* com a *própria posição do CM*.
- Porém, note que a *origem* desse referencial é muitas vezes irrelevante: o que importa é o *estado de movimento* desse referencial.
- Além do mais, em Relatividade o *4-momento* de uma partícula ou de um sistema de partículas *nunca é nulo*: no mínimo, temos as *energias* de repouso das partículas, de forma que $P^0 \neq 0$.
- De fato, em Relatividade o conceito do CM (como significando uma posição no espaço) é um tanto problemática. Para ver isso, considere o caso mais simples de duas partículas (figura ao lado).
- As três situações mostram a posição do centro de massa como definido pela condição de que essa posição permanece em movimento retilíneo e uniforme, mesmo que as partículas se choquem.
- Vocês podem verificar que, dependendo do referencial utilizado para descrever esse sistema, o CM pode estar localizado em diferentes posições.
- Note que essa indeterminação do CM não é um grande problema: ainda podemos definir *referenciais inerciais* tal que $\vec{P} = 0$. Esses são os *referenciais do CM*.



EXPLOÇÃO RELATIVÍSTICA (I)

- Considere a desintegração de um corpo de massa m_0 , inicialmente em repouso, como indicado na figura ao lado.
- É útil pensar nesse corpo como um "sistema ligado": duas partículas que interagem mas estão amarradas, até que um "gatilho" solta as partículas.
- Se nenhuma força externa agiu para causar essa desintegração, então temos **conservação do 4-momento**, ou seja:

Cons. de energia : $m_0 c^2 = m_1 c^2 \gamma_1 + m_2 c^2 \gamma_2$

Cons. de momento : $\vec{0} = m_1 \gamma_1 \vec{v}_1 + m_2 \gamma_2 \vec{v}_2$

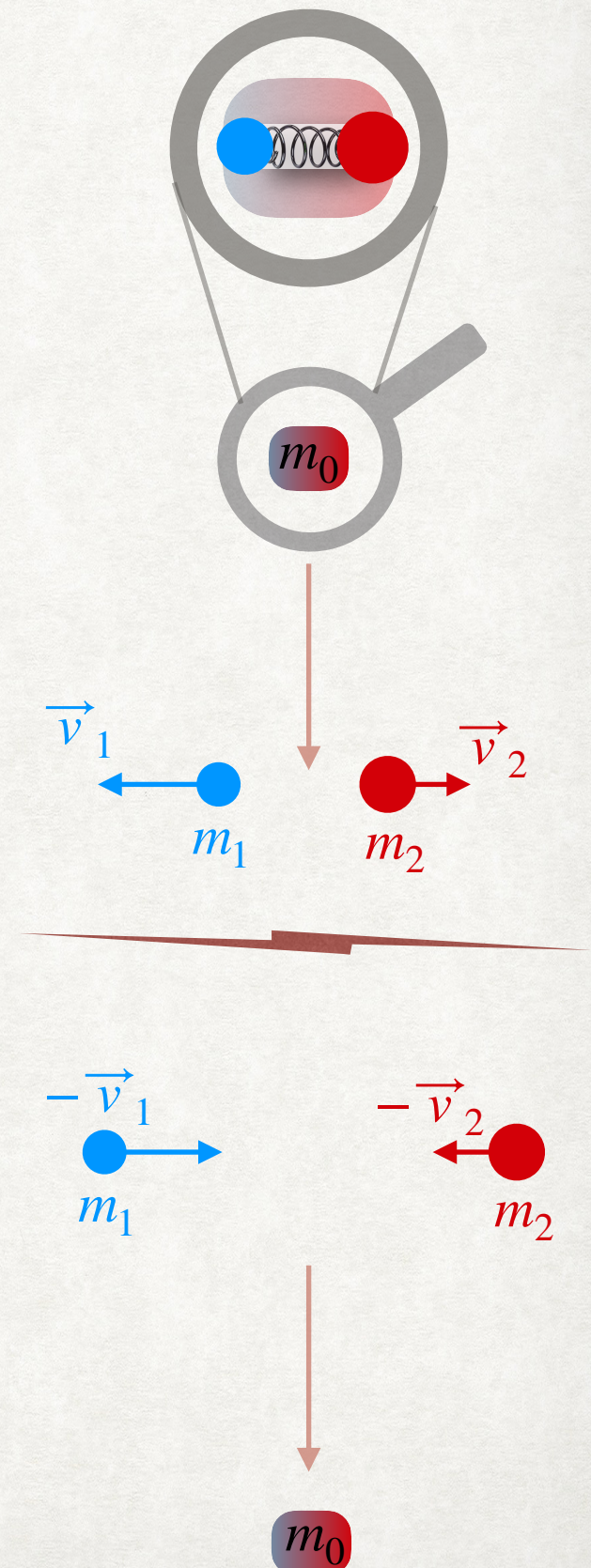
- Da **conservação de energia** podemos deduzir que:

$$(m_0 - m_1 - m_2) c^2 = m_1 c^2 (\gamma_1 - 1) + m_2 c^2 (\gamma_2 - 1)$$

$$\Rightarrow \Delta m c^2 = K_1 + K_2 ,$$

ou seja, a variação da massa é dada pela **energia cinética**.

- **Em outras palavras, a energia cinética do estado final veio da conversão de uma parte da energia de repouso (massa!) do estado inicial!**
- Podemos inclusive **inverter o filme**, e imaginar que duas partículas se juntam num choque inelástico, gerando uma só partícula no estado final. Essa partícula terá uma massa final $m_0 = m_1 + m_2 + \Delta m$, onde $\Delta m = (K_1 + K_2)/c^2$.



EXPLOÇÃO RELATIVÍSTICA (II)

- Imagine agora que uma das partículas no estado final tem massa nula (por exemplo, a partícula 2 pode ser um fóton), de energia E_2 e momento $p_2 = E_2/c$.
- Novamente, pela conservação de 4-momento temos:

Cons. de energia : $m_0 c^2 = m_1 c^2 \gamma_1 + p_2 c$

Cons. de momento : $\vec{0} = m_1 \gamma_1 \vec{v}_1 + \vec{p}_2$

- Da segunda equação temos que, em módulo:

$p_2 = p_1 = m_1 \gamma_1 v_1$, e substituindo na primeira equação obtemos que:

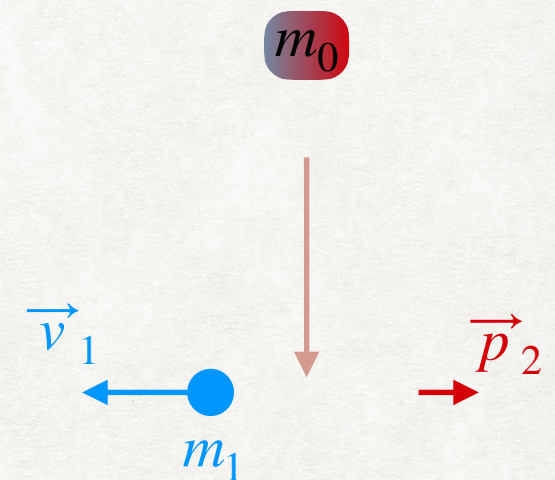
$$m_0 c^2 = m_1 c^2 \gamma_1 + m_1 \gamma_1 v_1 c \Rightarrow m_0 = m_1 \gamma_1 \left(1 + \frac{v_1}{c} \right)$$

- Mas lembre que $\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - v_1^2/c^2}$, e portanto:

$$m_0 = m_1 \frac{1}{\sqrt{(1 + v_1/c)(1 - v_1/c)}} \left(1 + \frac{v_1}{c} \right) = m_1 \sqrt{\frac{1 + v_1/c}{1 - v_1/c}}$$

- Podemos também inverter essa relação para encontrar a velocidade v_1 :

$$v_1 = c \frac{m_0^2 - m_1^2}{m_0^2 + m_1^2}$$



ESPALHAMENTO

- Vamos agora considerar um problema de “espalhamento” — que não é nada mais do que uma palavra sofisticada para “colisão”: duas partículas interagem e mudam o estado de movimento uma da outra.
- No chamado **Espalhamento Compton**, um elétron em repouso é atingido por um fóton.
- A pergunta que queremos responder é: qual a relação entre o **ângulo de espalhamento do fóton** (φ) e a **mudança de frequência** (energia) desse fóton? Para isso vamos usar a **relação entre energia e frequência** da luz encontrada por Planck:

$$E = h\nu \quad , \quad \text{onde } h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1} \text{ é a } \textbf{constante de Planck}.$$

- O problema é, portanto, encontrar uma relação entre as **energias inicial e final do fóton** e o **ângulo de espalhamento**. Temos:

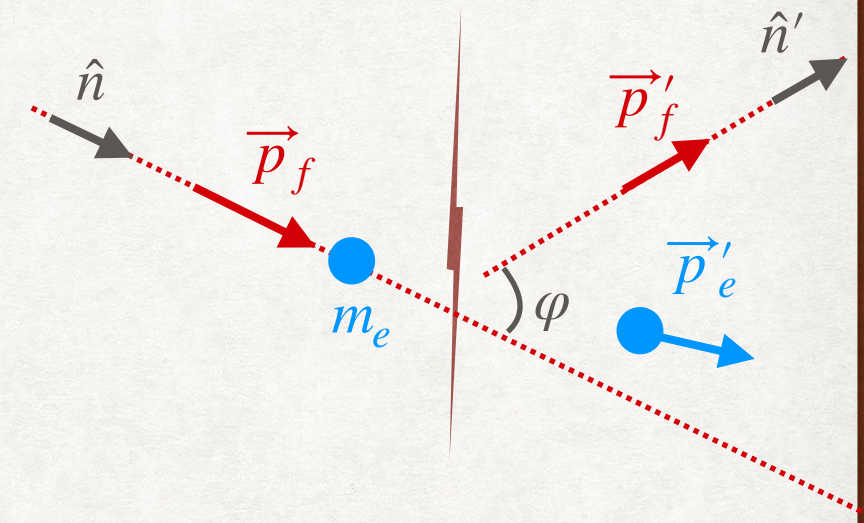
$$p_f^\mu = \left\{ \frac{E_f}{c}, \frac{E_f}{c} \hat{n} \right\} = \frac{h\nu}{c} \{1, \hat{n}\} \quad , \quad p_f^{\mu'} = \frac{h\nu'}{c} \{1, \hat{n}'\}$$

- Pela conservação do 4-momento temos:

$$p_f^\mu + p_e^\mu = p_f^{\mu'} + p_e^{\mu'}$$

- Em vez de abrir as componentes (no mínimo 3) dessas equações, vamos passar o 4-momento do fóton no estado final para o **lado esquerdo**, e tomar a norma disso:

$$p_f^\mu + p_e^\mu - p_f^{\mu'} = p_e^{\mu'} \quad ||p_f^\mu + p_e^\mu - p_f^{\mu'}||^2 = ||p_e^{\mu'}||^2$$



ESPALHAMENTO

- Essa expressão,

$$||p_f^\mu + p_e^\mu - p_f^{\mu'}||^2 = ||p_e^{\mu'}||^2 ,$$

é bem mais simples do que parece. Afinal, como essa norma de Minkowski não é nada mais do que um produto escalar, temos que:

$$||A + B||^2 = ||A||^2 + 2||A B|| + ||B||^2 , \quad \text{onde, lembre-se,}$$

$$||A||^2 = (A^0)^2 - (\vec{A})^2 , \quad \text{e} \quad ||A B|| = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

- Portanto, abrindo a norma dos 4-momentos acima temos:

$$||p_f^\mu||^2 + ||p_e^\mu||^2 + ||p_f^{\mu'}||^2 + 2||p_f^\mu p_e^\mu|| - 2||p_f^\mu p_f^{\mu'}|| - 2||p_e^\mu p_f^{\mu'}|| = ||p_e^{\mu'}||^2$$

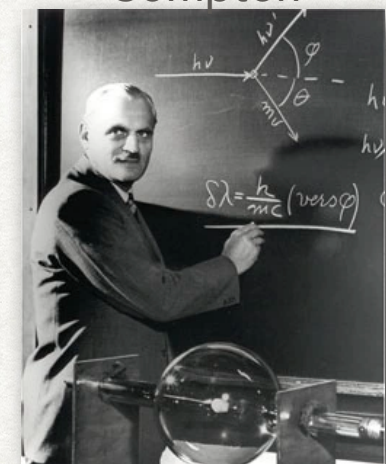
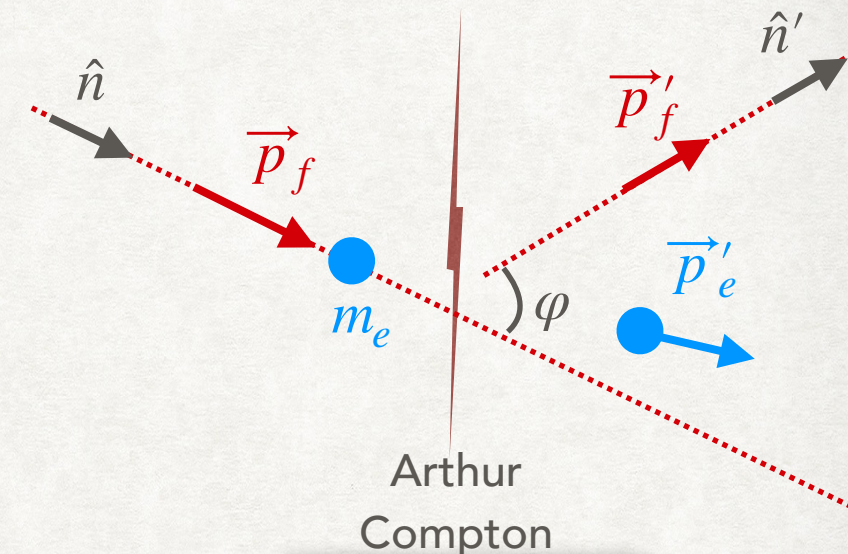
$$\Rightarrow 2||p_f^\mu p_e^\mu|| - 2||p_f^\mu p_f^{\mu'}|| - 2||p_e^\mu p_f^{\mu'}|| = 0$$

- Ou seja,

$$||p_e^\mu(p_f^\mu - p_f^{\mu'})|| = ||p_f^\mu p_f^{\mu'}|| \Rightarrow p_e^0(p_f^0 - p_f^{0'}) - \vec{p}_e \cdot (\vec{p}_f - \vec{p}_f') = p_f^0 p_f^{0'} - \vec{p}_f \cdot \vec{p}_f'$$

- Usando agora que $E_f = h\nu$, $E_f' = h\nu'$, $\vec{p}_f = (E_f/c)\hat{n}$, $\vec{p}_f' = (E_f'/c)\hat{n}'$ temos:

$$m_e c^2 (h\nu - h\nu') = h\nu h\nu' (1 - \cos \varphi)$$



Espalhamento Compton:

$$\lambda - \lambda' = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi) = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

UM POUCO DE FÍSICA NUCLEAR

- Os **núcleos dos átomos** são compostos de **prótons** (de carga positiva) e **nêutrons** (de carga nula). — os chamados **nucleons**. As massas dessas partículas são quase iguais:

$$m_p = 938.28 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2$$

onde o elétron-Volt é uma **unidade de energia**, correspondente à energia cinética adquirida por um elétron ao ser acelerado por um potencial de 1 Volt. No SI temos $\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$, e se dividimos essa unidade de energia por c^2 temos uma unidade de **massa**:

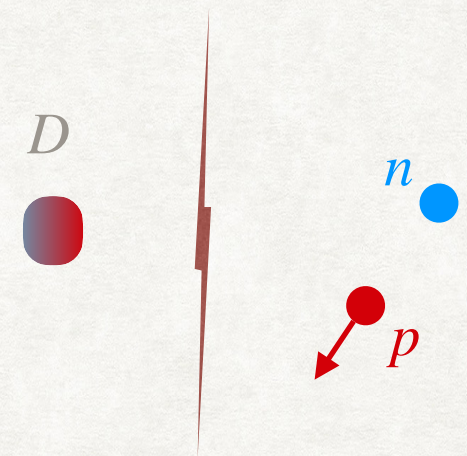
$$1 \text{ eV } c^{-2} = 1.783 \times 10^{-36} \text{ kg} \quad , \quad \text{ou seja,} \quad 1 \text{ MeV } c^{-2} = 1.783 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

- O núcleo atômico mais simples (depois do próton) é o Deutério, que é composto de um próton e um nêutron. A massa do Deutério é

$$m_D = 1875.6 \text{ MeV}/c^2$$

- Note que essa massa é um pouco **menor** que a soma das massas do próton e do nêutron: $m_p + m_n = 1877.95 \text{ MeV}/c^2$. Ou seja, ao juntarmos um próton e um nêutron fazendo um Deutério, "sobra" uma massa $\Delta m = 2.35 \text{ MeV}/c^2$.
- Note as unidades acima: se converter essa massa em energia cinética temos uma quantidade de energia $\Delta mc^2 = 2.35 \text{ MeV} \simeq 3,76 \times 10^{-13} \text{ J}$.
- Se você acha isso pouco considere **um Mol de prótons e nêutrons** (algo da ordem de 1 g) que sejam convertidos em Deutério. Isso liberaria uma energia total de:

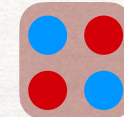
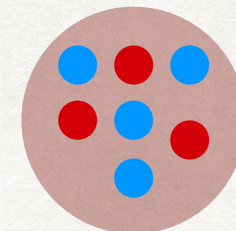
$$E \simeq 2.3 \times 10^{11} \text{ J} \simeq \mathbf{50 \text{ toneladas de TNT}} \quad (1 \text{ grama de TNT} = 4000 \text{ J})$$



Energia de ligação:
 $\Delta E = \Delta mc^2$

UM POUCO DE FÍSICA NUCLEAR

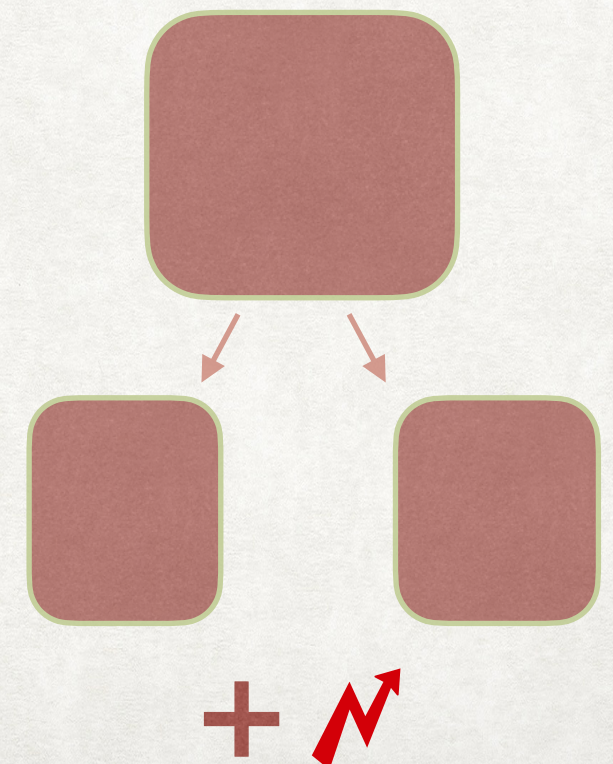
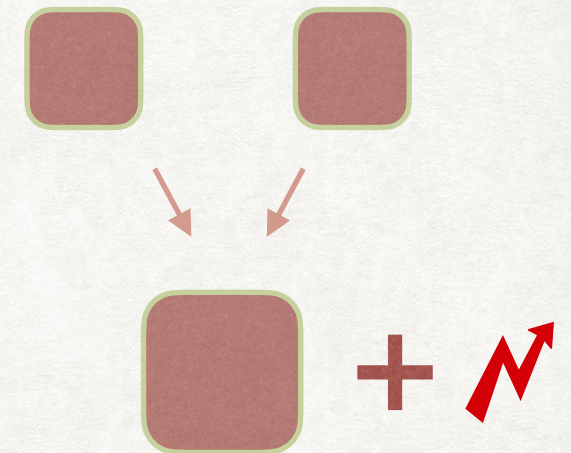
- Esse *ganho de energia* está presente quando *juntamos* as partes (prótons e nêutrons) para formar núcleos atômicos tais como, por exemplo, ${}^4\text{He}$, que é composto por dois prótons e dois nêutrons.
- A *energia de ligação* do He é $\Delta m = 22.8 \text{ MeV}/c^2$, ou seja uma energia de ligação por nucleon de $5.07 \text{ MeV}/c^2$. Ou seja, ganhamos quase quatro vezes mais energia se conseguirmos juntar prótons e nêutros e formar ${}^4\text{He}$ do que se formarmos Deutério.
- Essa tendência se repete para os núcleos atômicos à medida que andamos “de cima para baixo, da esquerda para a direita” na Tabela Periódica: He, Li, Be, ... Mas a energia de ligação por nucleon *começa a cair*.
- Ao chegar no núcleo do Ferro, a *energia de ligação* por nucleon passa a *crescer*, então a partir desse núcleo atômico não ganhamos mais energia ao fazer esse núcleo aumentar — de fato, temos que *dar* energia para criar núcleos mais pesados que o Fe.
- Dito de outro modo: agora podemos *ganhar energia* se *quebrarmos* núcleos mais pesados que o Ferro.

 ${}^4\text{He}$  ${}^7\text{Li}$ 

•
•
•
•
•

UM POUCO DE FÍSICA NUCLEAR

- A *fusão* nuclear (*adição* de nucleons aos núcleos atômicos, ou *junção* de núcleos) é um processo *exotérmico* (libera energia) para núcleos mais leves que o Fe.
- A *fissão* nuclear (retirada de nucleons, ou *quebra* dos núcleos em partes menores) é um processo exotérmico para núcleos mais pesados que o Fe.



UM POUCO DE FÍSICA NUCLEAR

- A energia de ligação por nucleon cresce até o elemento Fe, depois começa a cair.

PRODUCED BY THE FOUNDATION FOR EDUCATION, SCIENCE AND TECHNOLOGY FOR NATIONAL SET WEEK 2003

PERIODIC TABLE of the ELEMENTS

DMITRI MENDELEEV (1834 - 1907)

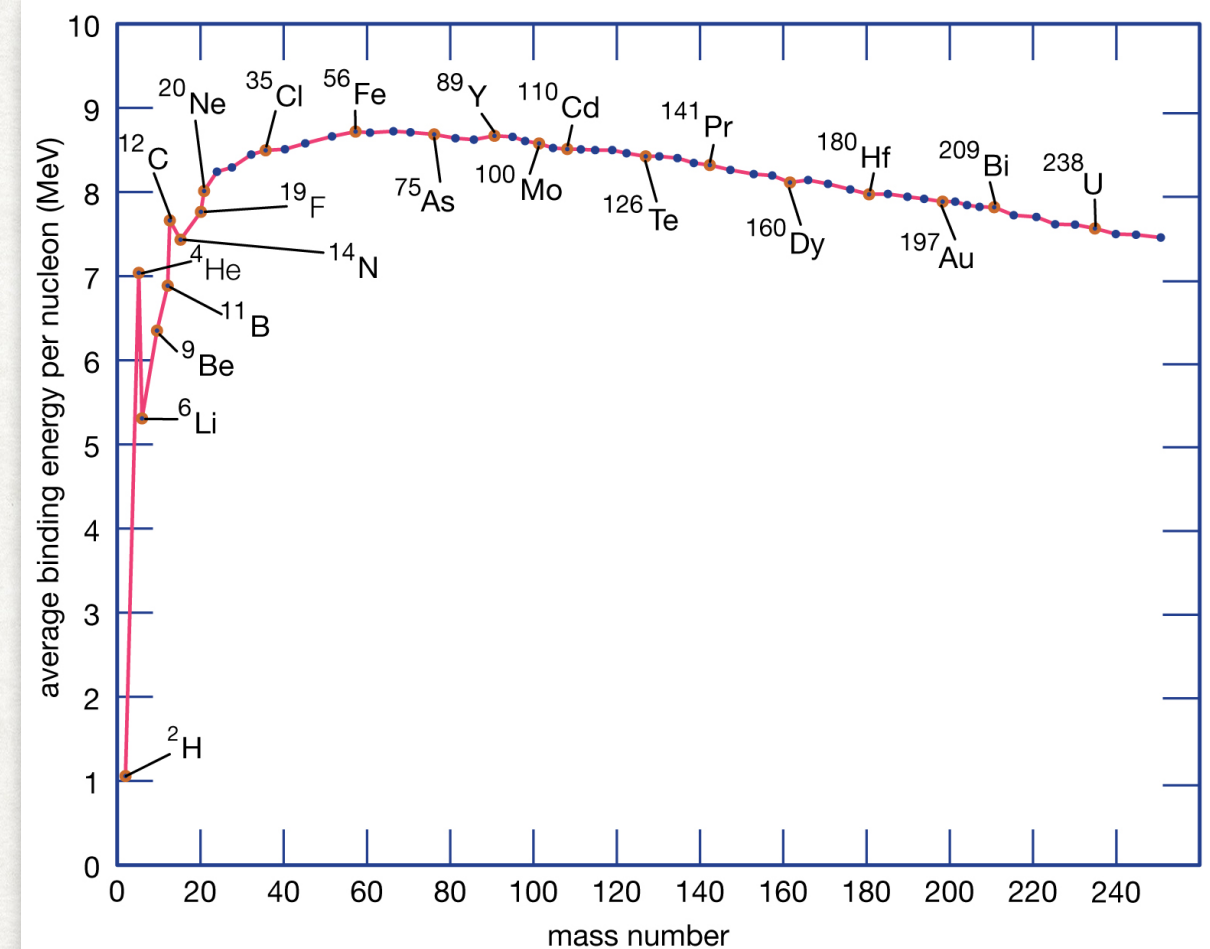
The Russian chemist, Dmitri Mendeleev, was the first to observe that if elements were listed in order of atomic mass, they showed regular (periodical) repeating properties. He formulated his discovery in a periodic table of elements, now regarded as the backbone of modern chemistry.

The crowning achievement of Mendeleev's periodic table lay in his prophesy of then, undiscovered elements. In 1869, the year he published his periodic classification, the elements gallium, germanium and scandium were unknown. Mendeleev left spaces for them in his table and even predicted their atomic masses and other chemical properties. Six years later, gallium was discovered and his predictions were found to be accurate. Other discoveries followed and their chemical behaviour matched that predicted by Mendeleev.

This remarkable man, the youngest in a family of 17 children, has left the scientific community with a classification system so powerful that it became the cornerstone in chemistry teaching and the prediction of new elements ever since. In 1955, element 101 was named after him, Md, Mendelevium.

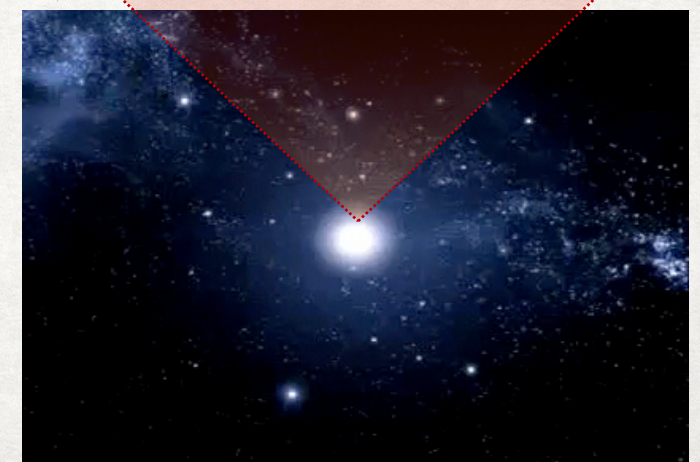
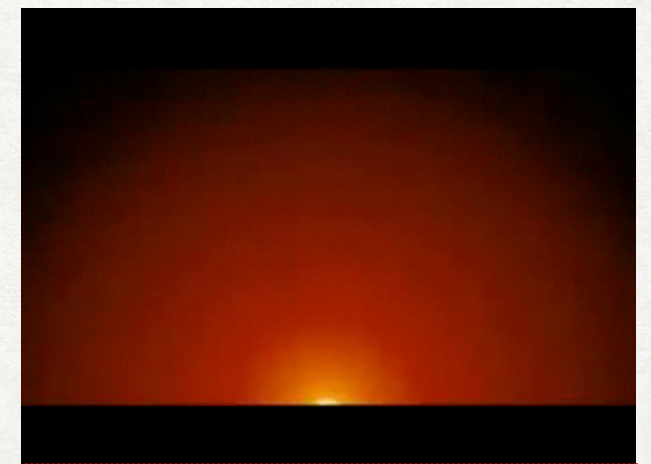
Legend:
 ■ Gas
 ■ Liquid
 ■ Solid
 ■ Metalloid
 ■ Non-metal
 ■ Metal

Ac Th Pa U Np Pu Am Cm Bk Cf Es Fm Md No Lr



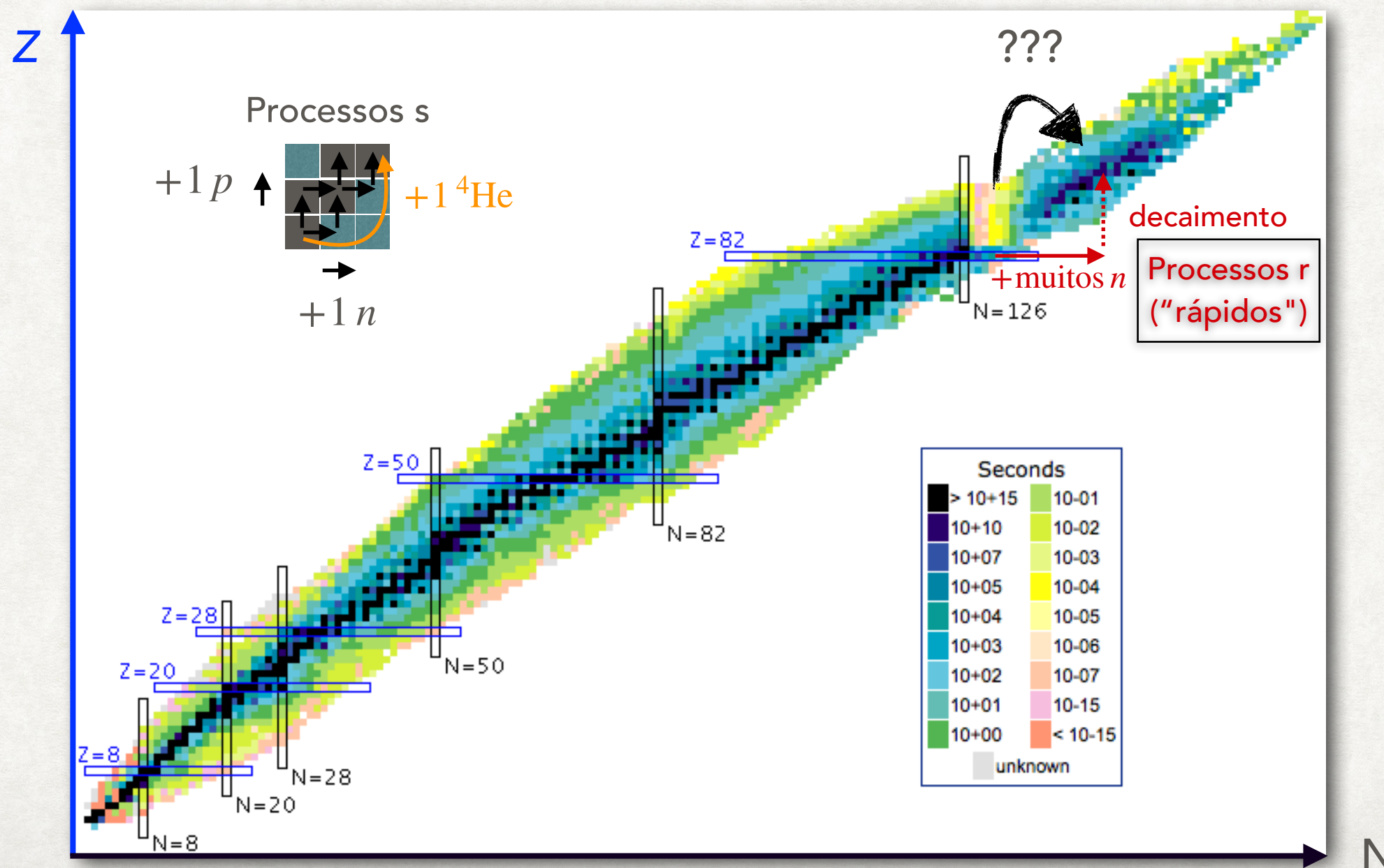
UM POUCO DE FÍSICA NUCLEAR

- Isso significa que a *origem dos elementos* é muito diferente, dependendo do *número atômico* deles.
- É *energeticamente favorável* transformar dois núcleos leves em um núcleo um pouco mais pesado (desde que estejamos abaixo do número atômico do Ferro), ou ir lentamente aumentando o número atômico, adicionando prótons e/ou nêutrons.
- Esse processo, de incrementalmente aumentar o número de nucleons de um núcleo atômico, se chamam "processos s" (de "slow"), e ocorrem durante a evolução do Universo, e na fusão nuclear que ocorre dentro das estrelas.
- Quando essas estrelas explodem (em supernovas), esses elementos são jogados de volta no espaço e depois reciclados em novas estrelas e planetas.



UM POUCO DE FÍSICA NUCLEAR

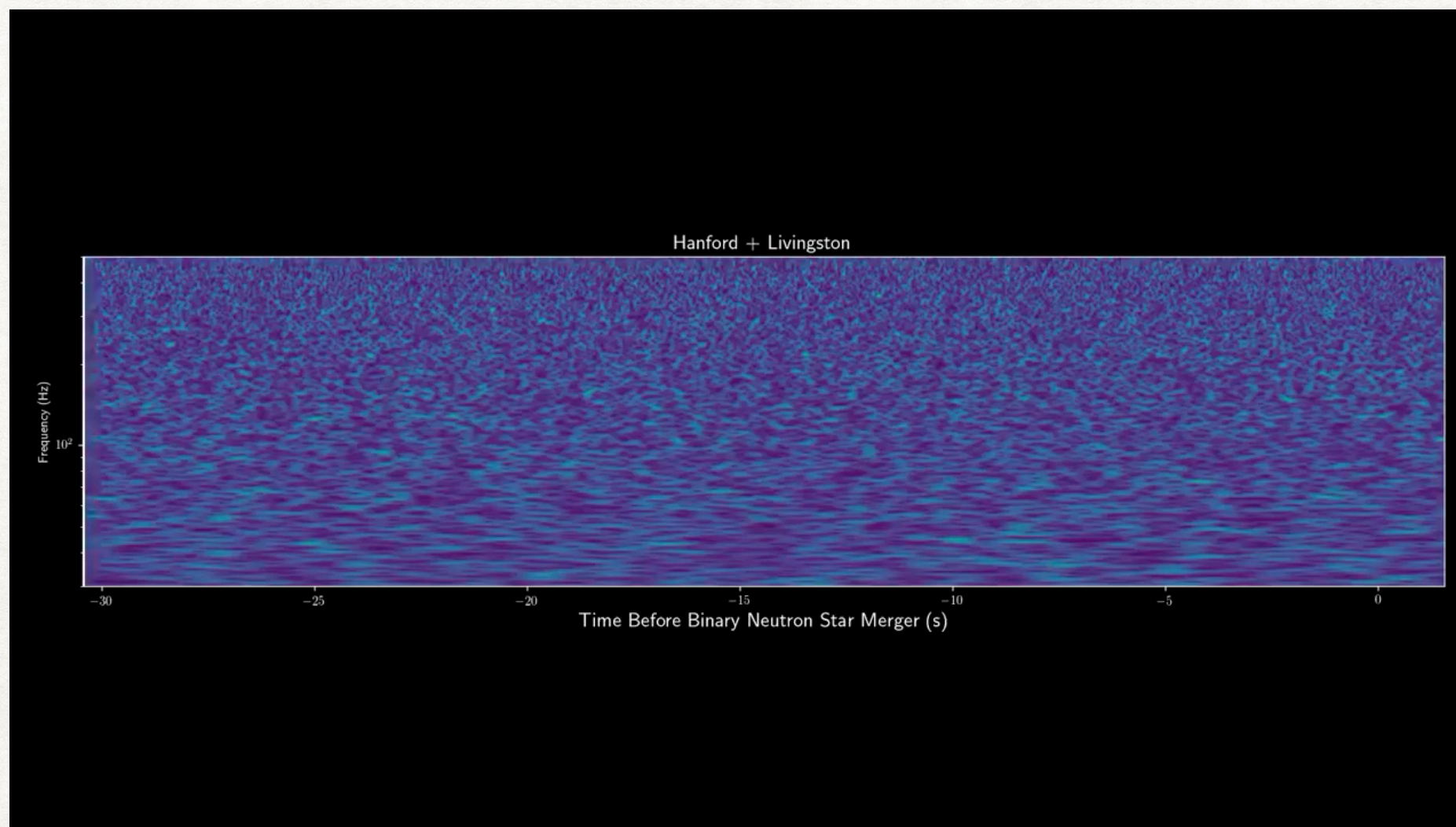
- Os processos *s* conseguem criar elementos mais pesados ao longo da “ilha de estabilidade” dos isótopos, como mostrado na figura abaixo.
- Durante as Supernovas parte da energia da explosão é injetada na produção de núcleos mais pesados que o Fe, criando até núcleos de Pb (Chumbo). Mas essas reações, que ocorrem na onda de choque da Supernova, também são *processos s*.



**ESSE MISTÉRIO PERMANECEU
DURANTE UNS 50 ANOS.
ATÉ QUE, EM 2017...**

A KILONOVA GW170817

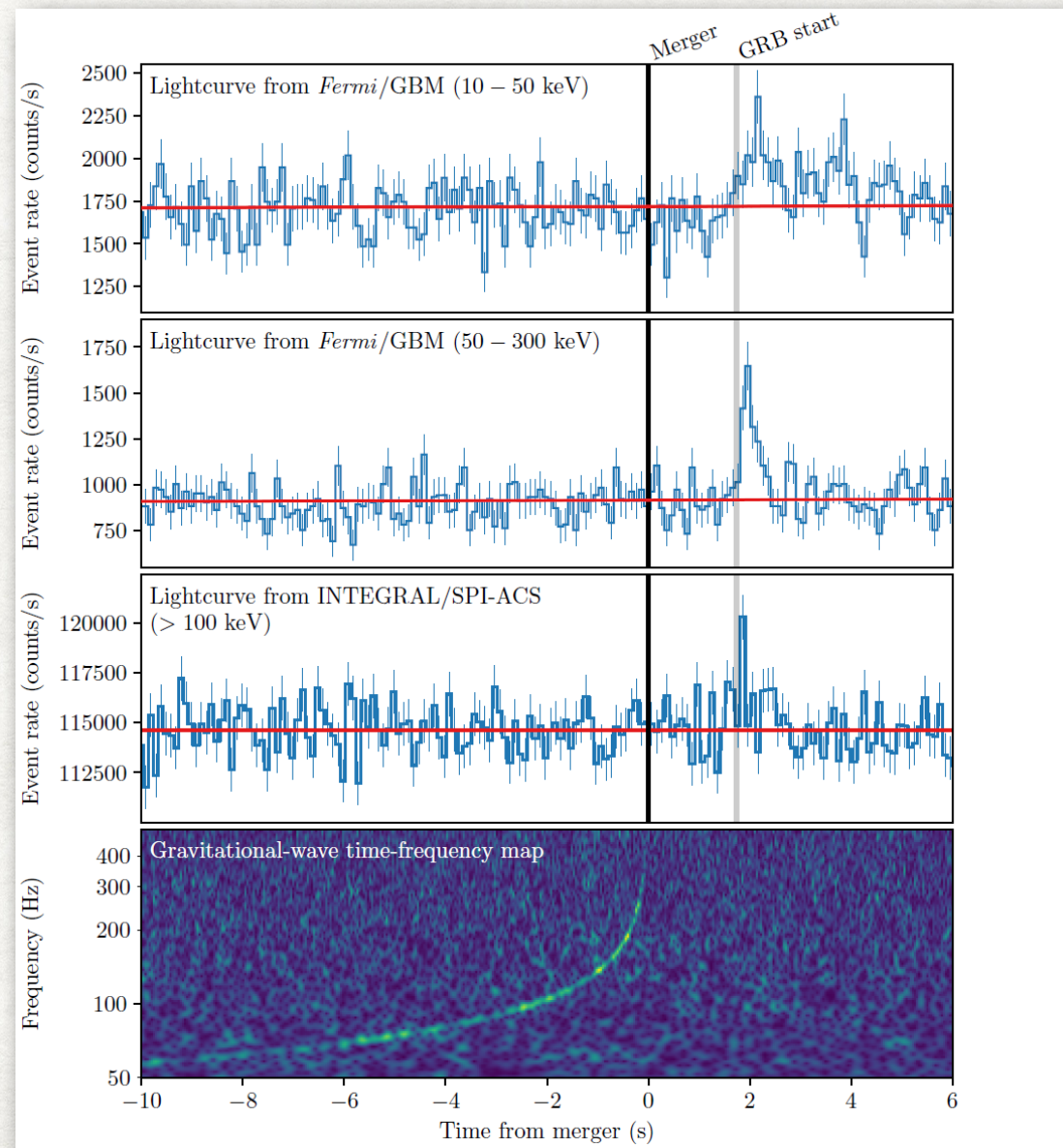
- Em 17/08/2017 o observatório de ondas gravitacionais LIGO detectou um sinal curioso... [você pode ver vários vídeos como esse aqui: <https://www.ligo.org/multimedia.php>]



- O sinal era forte o suficiente para indicar a fusão de dois corpos compactos, mas a massa dos dois corpos era relativamente pequena.

A KILONOVA GW170817

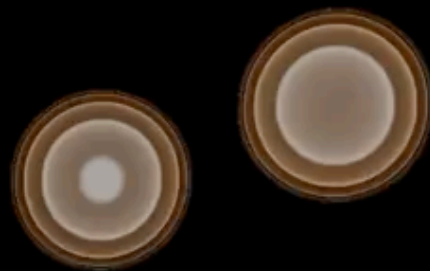
- No *mesmo instante*, o satélite *Fermi-LAT* detectou um *flash de radiação gama* vindo aproximadamente da *mesma direção*



A KILONOVA GW170817

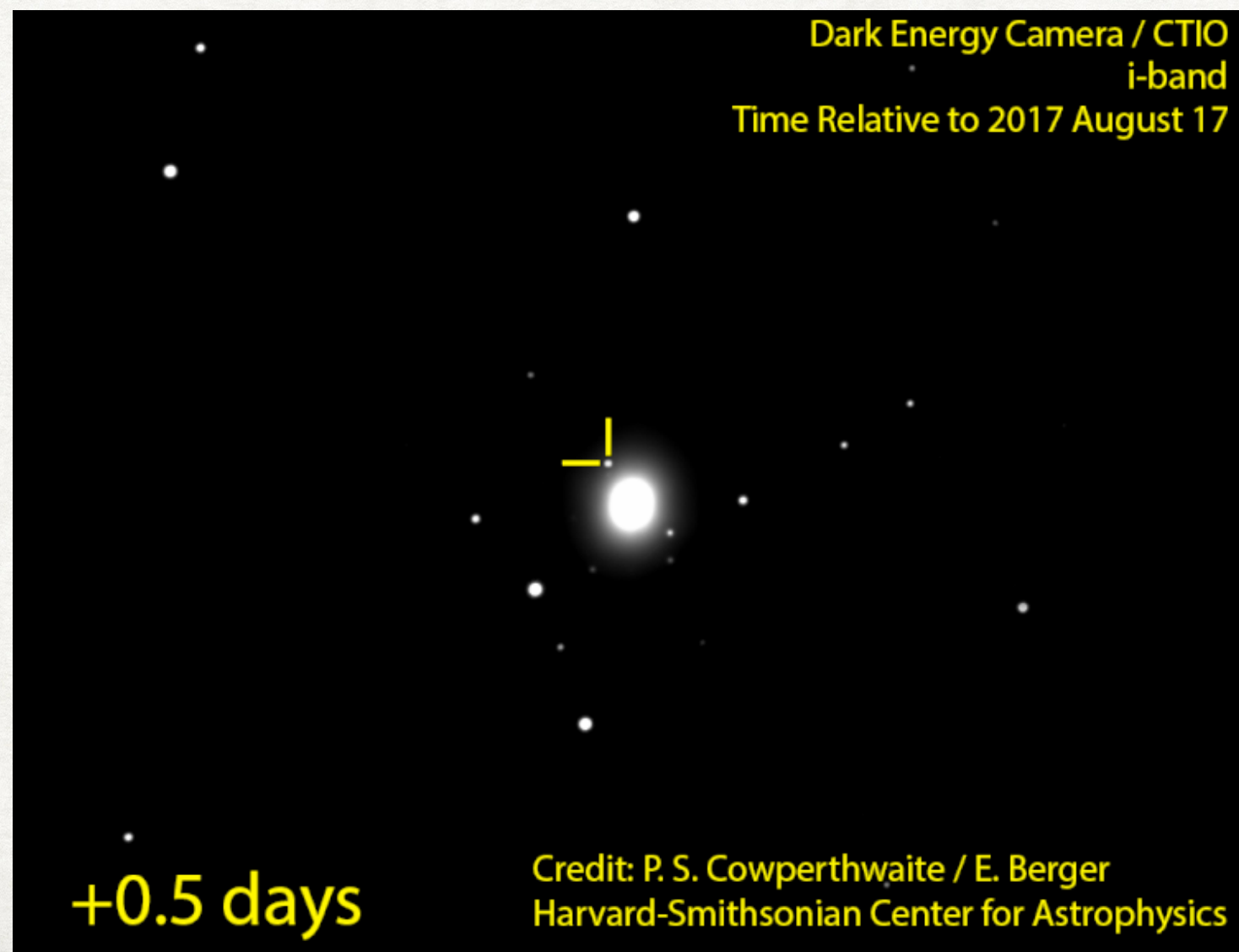
- Essas duas observações simultâneas levaram os cientistas a acreditar que se tratava de um evento espetacular: a *fusão de duas estrelas de nêutrons*, provavelmente formando um *buraco negro* no estado final.

GW170817: The Merger of Two Neutron Stars



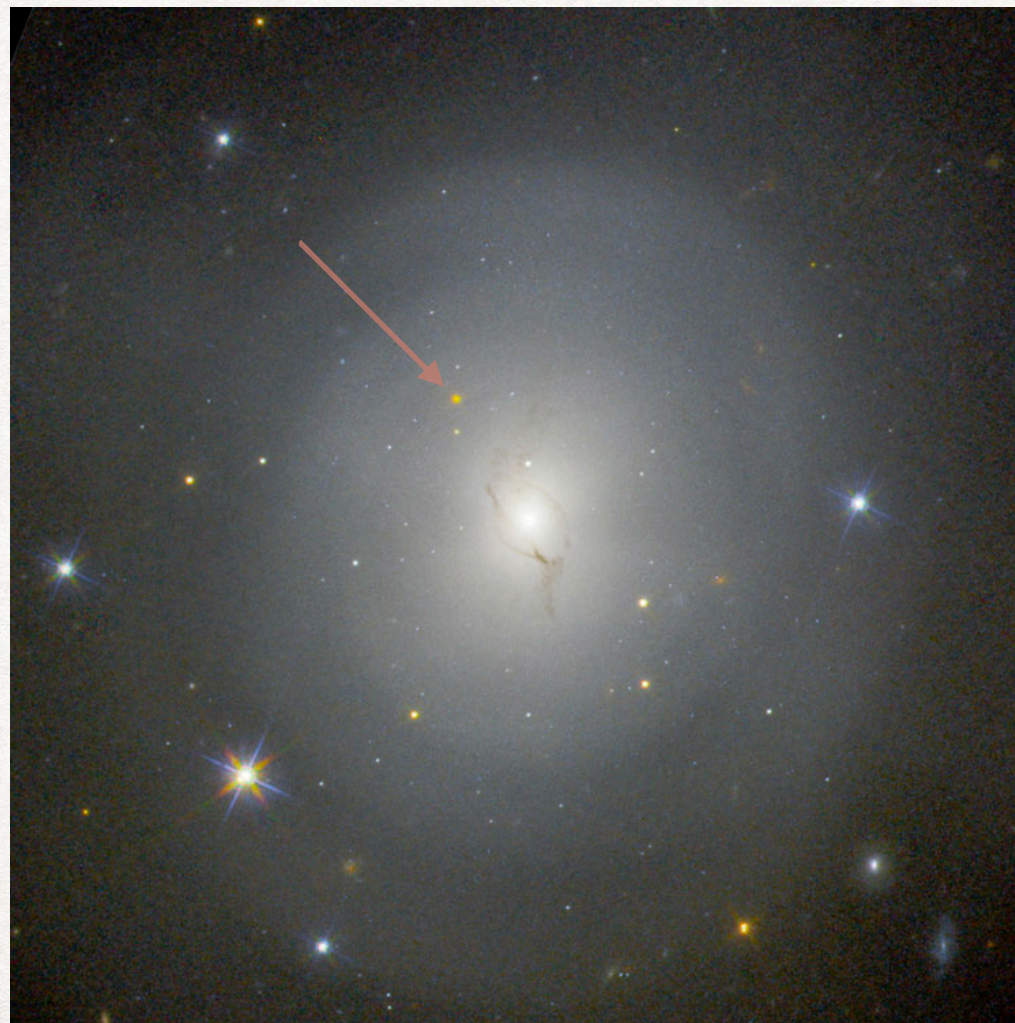
A KILONOVA GW170817

- Imediatamente começou uma caçada mundial pela *contrapartida óptica* dessa “kilonova”. No dia seguinte vários telescópios haviam detectado os sinais dessa fusão de estrelas de nêutrons!



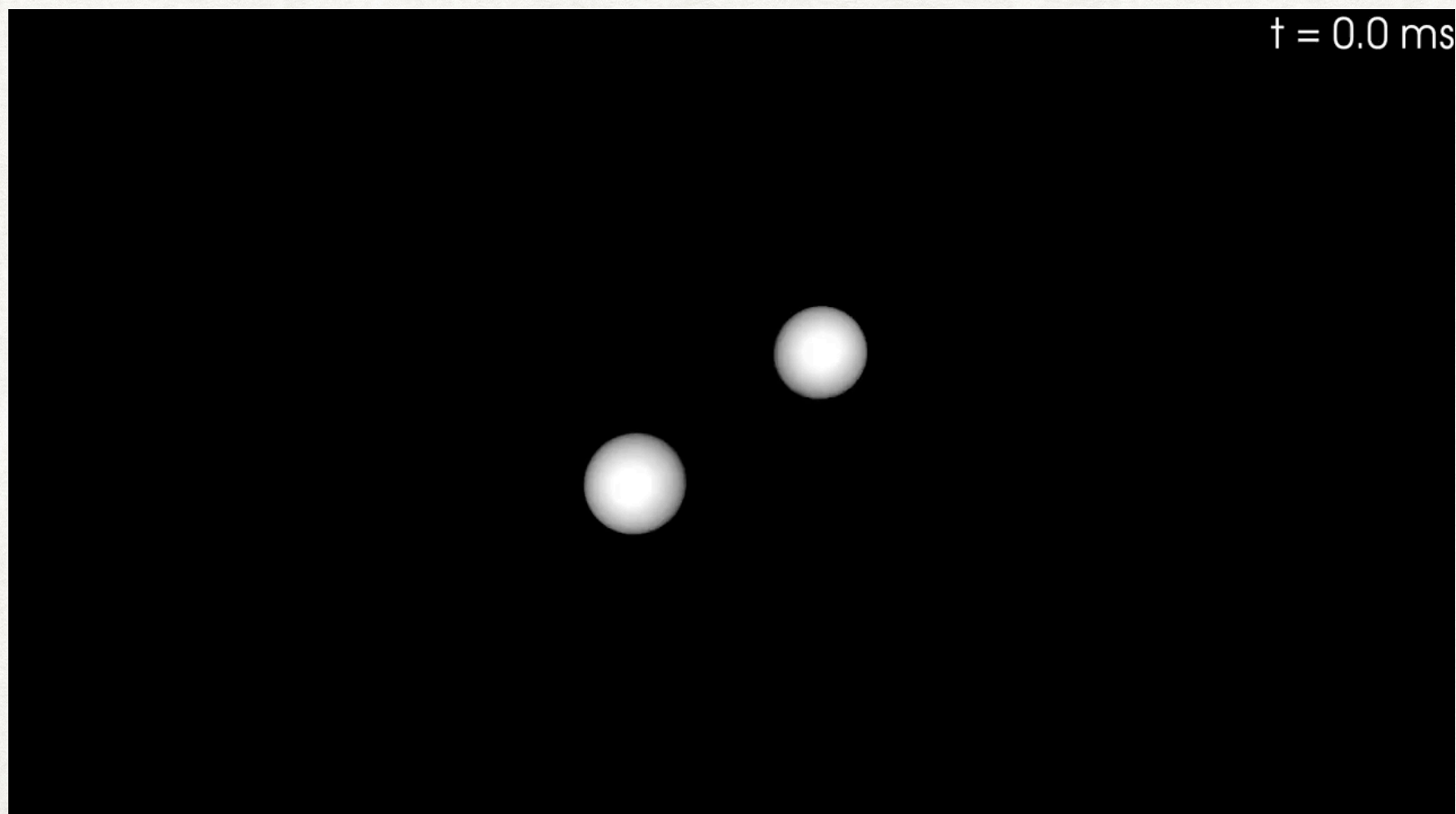
A KILONOVA GW170817

- Um dos primeiros telescópios a detectar essa explosão cósmica foi o nosso T80-Sul, um telescópio da USP/FAPESP que fica localizado no Chile.



A KILONOVA GW170817

- Estrelas de nêutrons são como núcleos atômicos gigantes, com massas similares à massa do Sol.
- A fusão de duas estrelas é o "experimento" ideal para observar os mecanismos que produzem elementos ultra-pesados.



A KILONOVA GW170817

- Uma parte da matéria das estrelas originais é engolida pelo buraco negro que se forma, mas uma parte é ejetada de volta para o espaço. Essa é a origem de todos os elementos pesados na Terra: o ouro ou a prata do seu anel se originaram de uma explosão como essa!

