Notas sobre as notações utilizadas em dinâmica de voo

Ricardo Afonso Angélico

O presente documento visa esclarecer algumas dúvidas acerca das diferentes notações utilizadas para descrever as equações linearizadas da dinâmica do movimento de uma aeronave de asa fixa.

Na literatura de dinâmica de voo, é comum o uso de duas notações: inglesa e norte-americana. Independente da notação utilizada, a resposta da aeronave deve ser a mesma, visto que as hipóteses utilizadas para construir os modelos em ambas as notações, são idênticas. A notação norte americana adota como variáveis do espaço de estados $\mathbf{x_{lg}} = [u \; w \; q \; \Delta\theta]^T$ e $\mathbf{x_{ld}} = [v \; p \; r \; \phi]^T$ para os movimentos longitudinal e latero-directional, respectivamente. Enquanto que, na notação inglesa tem-se como variáveis de estado $\mathbf{x_{lg}} = [u \; \alpha \; \theta]^T$ e $\mathbf{x_{ld}} = [\beta \; \phi \; \Psi]^T$. Pode-se comutar entre uma notação e outra, porém deve-se atentar para a correta transferência das derivadas dimensionais de um sistema para outro.

As matrizes que descrevem a dinâmica longitudinal e latero-direcional de uma aeronave no espaço de estados utilizando as variáveis especificadas no trabalho são descritas a seguir. Para o movimento longitudinal, o vetor de estados é $\mathbf{x} = [u \; w \; q \; \theta]^T$, e para o latero-direcional $\mathbf{x} = [v \; p \; r \; \phi]^T$.

Longitudinal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_u + X_{Tu} & \dfrac{X_\alpha}{U_1} & 0 & -g\cos\theta_1 \\[2ex] \dfrac{U_1 Z_u}{U_1 - Z_{\dot\alpha}} & \dfrac{Z_\alpha}{U_1 - Z_{\dot\alpha}} & \dfrac{U_1\left(U_1 + Z_q\right)}{U_1 - Z_{\dot\alpha}} & \dfrac{-U_1 g\sin\theta_1}{U_1 - Z_{\dot\alpha}} \\[2ex] M_u + M_{Tu} & \dfrac{M_\alpha + M_{T\alpha}}{U_1} + \dfrac{M_{\dot\alpha} Z_\alpha}{U_1(U_1 - Z_{\dot\alpha})} & \dfrac{M_{\dot\alpha}(Z_q + U_1)}{U_1 - Z_{\dot\alpha}} + M_q & -\dfrac{M_{\dot\alpha} g\sin\theta_1}{U_1 - Z_{\dot\alpha}} \\[2ex] 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} X_{\delta_e} \\ \dfrac{Z_{\delta_e}}{U_1 - Z_{\dot{\alpha}}} \\ M_{\delta_e} + \dfrac{M_{\dot{\alpha}} Z_{\delta_e}}{U_1 - Z_{\dot{\alpha}}} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Latero-direcional

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{Y_\beta}{U_1} & Y_p & Y_r - U_1 & g\cos\theta_1 \\ \dfrac{L_\beta + i_x N_\beta + i_x N_{T\beta}}{U_1(1 - i_x i_z)} & \dfrac{L_p + i_x N_p}{1 - i_x i_z} & \dfrac{L_r + i_x N_r}{1 - i_x i_z} & 0 \\ \dfrac{i_z L_\beta + N_\beta + N_{T\beta}}{U_1(1 - i_x i_z)} & \dfrac{i_z L_p + N_p}{1 - i_x i_z} & \dfrac{i_z L_r + N_r}{1 - i_x i_z} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

sendo $i_x = I_{xz}/I_{xx}$ e $i_z = I_{xz}/I_{zz}$.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} Y_{\delta_a} & Y_{\delta_r} \\ \dfrac{L_{\delta_a} + i_x N_{\delta_a}}{1 - i_x i_z} & \dfrac{L_{\delta_r} + i_x N_{\delta_r}}{1 - i_x i_z} \\ \dfrac{i_z L_{\delta_a} + N_{\delta_a}}{1 - i_x i_z} & \dfrac{i_z L_{\delta_r} + N_{\delta_r}}{1 - i_x i_z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

As derivadas dimensionais de estabilidade e controle utilizadas em (1), (2), (3) e (4) estão descritas a seguir.

Derivadas longitudinais

$$X_u = \frac{-q\,S\,(C_{D_u} + 2C_{D1})}{m\,U_1} \qquad X_{Tu} = \frac{q\,S\,C_{Txu}}{m\,U_1} \qquad X_\alpha = \frac{-q\,S\,(C_{D_\alpha} - C_{L1})}{m}$$

$$Z_u = \frac{-q\,S\,(C_{L_u} + 2C_{L1})}{m\,U_1} \qquad Z_\alpha = \frac{-q\,S\,(C_{L\alpha} + 2C_{D1})}{m} \qquad Z_{\dot\alpha} = \frac{-q\,S\,\bar{c}\,C_{L\dot\alpha}}{2\,m\,U_1} \qquad Z_q = \frac{-q\,S\,\bar{c}\,C_{Lq}}{2\,m\,U_1}$$

$$M_u = \frac{q\,S\,\bar{c}C_{mu}}{I_{yy}\,U_1} \qquad M_T u = \frac{q\,S\,\bar{c}C_{mTu}}{I_{yy}\,U_1} \qquad M_\alpha = \frac{q\,S\,\bar{c}C_{m\alpha}}{I_{yy}}$$

$$M_{T\alpha} = \frac{q\,S\,\bar{c}C_{mT\alpha}}{I_{yy}} \qquad M_{\dot\alpha} = \frac{q\,S\,\bar{c}^2 C_{m\dot\alpha}}{2\,I_{yy}\,U_1} \qquad M_q = \frac{q\,S\,\bar{c}^2 C_{mq}}{2\,I_{yy}\,U_1}$$

$$X_{\delta_e} = \frac{-q\,S\,C_{D\delta_e}}{m} \qquad Z_{\delta_e} = \frac{-q\,S\,C_{L\delta_e}}{m} \qquad M_{\delta_e} = \frac{-q\,S\,\bar{c}\,C_{L\delta_e}}{I_{yy}}$$

A notação norte-americana adota as derivadas em relação a w e $\dot w$ ao invés de α e $\dot\alpha$, respectivamente. Nesse caso, por exemplo, tem-se $X_w = X_\alpha/U_1$. Raciocínio análogo pode ser adotado para as derivadas Z_w, $Z_{\dot w}$.

Derivadas latero-direcionais

$$Y_\beta = \frac{q\,S\,C_{y\beta}}{m} \qquad Y_p = \frac{q\,S\,b\,C_{yp}}{2\,m\,U_1} \qquad Y_r = \frac{q\,S\,b\,C_{yr}}{2\,m\,U_1}$$

$$L_\beta = \frac{q\,S\,b\,C_{l\beta}}{I_{xx}} \qquad L_p = \frac{q\,S\,b^2\,C_{lp}}{2\,I_{xx}\,U_1} \qquad L_r = \frac{q\,S\,b^2\,C_{lr}}{2\,I_{xx}\,U_1}$$

$$N_\beta = \frac{q\,S\,b\,C_{n\beta}}{I_{zz}} \qquad N_{T_\beta} = \frac{q\,S\,b\,C_{nT_\beta}}{I_{zz}} \qquad N_p = \frac{q\,S\,b^2\,C_{np}}{2\,I_{zz}\,U_1} \qquad N_r = \frac{q\,S\,b^2\,C_{nr}}{2\,I_{zz}\,U_1}$$

$$Y_{\delta_a} = \frac{q\,S\,C_{y\delta_a}}{m} \qquad Y_{\delta_r} = \frac{q\,S\,C_{y\delta_r}}{m}$$

$$L_{\delta_a} = \frac{q\,S\,C_{l\delta_a}}{I_{xx}} \qquad L_{\delta_r} = \frac{q\,S\,C_{l\delta_r}}{I_{xx}}$$

$$N_{\delta_a} = \frac{q\,S\,C_{n\delta_a}}{I_{zz}} \qquad N_{\delta_r} = \frac{q\,S\,C_{n\delta_r}}{I_{zz}}$$

Observações:

1) Importante novamente ressaltar que as derivadas que envolvem ângulos estão descritas para radianos. Dessa forma, uma entrada unitária (degrau ou impulso) será uma unidade de radianos.

2) Complemente as informações previamente fornecidas com o valor da derivada $C_{np} = -0.01$.