T1 - Substitutiva - Gabarito

$V = M(2,2)$ e S ... subespaço gerado pelas matrizes:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \quad e \quad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Base para S a partir de M_1, M_2, M_3 e M_4. $\dim(S) = ?$

Deve-se verificar se há escalares $\neq 0$ associados às matrizes, pois se houver, isso implica que a matriz que acompanha o escalar não-nulo é CL de outras do conjunto.

LD ou LI: $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 + \delta M_4 = 0$

De onde se tem o sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma + \delta = 0 & (1) \\ -5\alpha + \beta - 4\gamma - 7\delta = 0 & (2) \\ -4\alpha - \beta - 5\gamma - 5\delta = 0 & (3) \\ 2\alpha + 5\beta + 7\gamma + \delta = 0 & (4) \end{cases}$$

$(1) + (2) - (3) + (4)$: $\alpha = -\beta - 2\gamma$

$\alpha \longrightarrow (1)$: $\delta = 0$

Reescrevendo o sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 & (i) \\ -5\alpha + \beta - 4\gamma = 0 & (ii) \\ -4\alpha - \beta - 5\gamma = 0 & (iii) \\ 2\alpha + 5\beta + 7\gamma = 0 & (iv) \end{cases}$$

$(i) + (ii) + 2(iii): \quad \alpha = -\gamma$

$\alpha \longrightarrow (i): \quad \beta = -\gamma$

$\alpha, \beta \longrightarrow (iv): \quad 0 = 0 \quad \therefore \quad 0\gamma = 0 \longrightarrow \underline{\gamma \in \mathbb{R}}$

Se $\gamma \in \mathbb{R}$, então $\exists\, \gamma \neq 0$, o que implica que M_3 (a matriz que acompanha γ) é CL de outras matrizes do conjunto. De fato: $M_3 = M_1 + M_2$. Logo, excluindo M_3 do conjunto, elimina-se a CL e o conjunto se torna LI. Assim:

$$B = \{M_1, M_2, M_4\} \text{ é base de } S \text{ ou}$$

$$S = [M_1, M_2, M_4].$$

Como há $\underline{\underline{3}}$ elementos em uma base de S, $\dim(S) = 3$.

b) $V = [M_1, M_2, M_3, M_4]$? Justifique.

$V = M(2,2)$ e $\dim(V) = 4$. Logo, são necessárias $\underline{\underline{4}}$ matrizes LI para gerarem todo o EV $V = M(2,2)$. Como em M_1, M_2, M_3 e M_4 só há 3 matrizes LI, esse conjunto não é suficiente para gerar todo o V. Desta forma:

$$V \neq [M_1, M_2, M_3, M_4]$$