Notas de Aula

Noções de Modelagem Biológica

30/09/2020

Alexandre Souto Martinez[1]

23 de setembro de 2020

[1] Departamento de Física (DF)
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto (FFCLRP)
Universidade de São Paulo (USP)

Aula

- Modelos Analíticos
  - Modelos contínuos e discretos
- Modelos Epidemiológicos
- Modelos Computacionais
- Modelos Estocásticos

Modelos Analíticos

Modelos Analíticos

Modelos

- contínuos e
- discretos com
- aumento de complexidade (permitem descrever situações mais complicadas).

Qual é a peça?

Grandezas:

constantes: parâmetros;

mutantes: variáveis

Relação entre as grandezas: funções, soluções de equações diferenciais ou algébricas.

Equações diferenciais, condições

iniciais: parâmetros;

contorno: funções.

Constante

$$\boxed{\frac{df(t)}{dt} = 0 \ ,}$$

Modelo sem !!!

Graça . . .

Constante

$$\frac{df(t)}{dt} = 0 \ ,$$

$$f(t) = f_0 \ .$$

Nada acontece

Linear

Coeficiente:

- constante

$$\frac{df(t)}{dt} = r_0 \ ,$$

Linear

Coeficiente:

- constante

$$\frac{df(t)}{dt} = r_0 \ ,$$

$$f(t) = f_0 + r_0(t - t_0) \ ;$$

Linear

Coeficiente:

- constante

$$\frac{df(t)}{dt} = r_0 \ ,$$

$$f(t) = f_0 + r_0(t - t_0) \ ;$$

- variável

$$\frac{df(t)}{dt} = r_0(t) \ ,$$

Linear

Coeficiente:

- constante

$$\frac{df(t)}{dt} = r_0 \ ,$$

$$f(t) = f_0 + r_0(t - t_0) \ ;$$

- variável

$$\frac{df(t)}{dt} = r_0(t) \ ,$$

$$f(t) = f_0 + r_0 \int_{t_0}^{t} dt' \, r_0(t') \ .$$

Exponencial

Coeficiente

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) \, ,$$

Exponencial

Coeficiente

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) \ ,$$

$$f(t) = f_0 \ e^{r_1 (t - t_0)} \ ;$$

Exponencial

Coeficiente

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) \ ,$$

$$f(t) = f_0 \ e^{r_1(t-t_0)} \ ;$$

Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t) \ ,$$

Exponencial

Coeficiente

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) \; ,$$

$$f(t) = f_0 \; e^{r_1(t-t_0)} \; ;$$

Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t) \; ,$$

$$f(t) = f_0 \; e^{\int_{t_0}^{t} dt' r_1(t')} \; .$$

Para $r_(t) = \beta k t^{\beta-1}$, $f(t) = f_0 e^{t^\beta - t_0^\beta}$, que é a exponencial estendida.

Exponencial: Gompertz

Para $f(t) = \ln[g(t)]$

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t)$$

Exponencial: Gompertz

Para $f(t) = \ln[g(t)]$

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f_0 \; e^{r_1 (t - t_0)} \; ,$$

Exponencial: Gompertz

Para $f(t) = \ln[g(t)]$

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f_0 \; e^{r_1(t-t_0)} \; ,$$

$$g(t) = e^{f(t)} = e^{f_0 e^{r_1(t-t_0)}} =$$

Exponencial: Gompertz

Para $f(t) = \ln[g(t)]$

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f_0 \; e^{r_1(t-t_0)} \; ,$$

$$g(t) = e^{f(t)} = e^{f_0 e^{r_1(t-t_0)}} =$$

Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t) \; ,$$

Exponencial: Gompertz

Para $f(t) = \ln[g(t)]$

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f_0 \; e^{r_1(t-t_0)} \; ,$$

$$g(t) = e^{f(t)} = e^{f_0 e^{r_1(t-t_0)}} =$$

Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t) \; ,$$

$$f(t) = f_0 \; e^{\int_{t_0}^{t} dt' r_1(t')} \; .$$

Para $r_(t) = \beta k t^{\beta-1}$, $f(t) = f_0 e^{t^\beta - t_0^\beta}$, que é a exponencial estendida.

Exponencial: equação de diferenças

Coeficiente

Constante:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)$$

Exponencial: equação de diferenças

Coeficiente

Constante:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = rx(t)$$

Exponencial: equação de diferenças

Coeficiente

Constante:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = rx(t)$$

assim $x(t+\Delta t) = \underbrace{(1 + r\Delta t)}_{\kappa} x(t)$. Perde-se a noção do que se passa no intervalo Δt.

Exponencial: equação de diferenças

Coeficiente

Constante:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = rx(t)$$

assim $x(t+\Delta t) = \underbrace{(1 + r\Delta t)}_{\kappa} x(t)$. Perde-se a noção do que se passa no intervalo Δt.

Chamando $x_i = x(i\Delta t)$, com $i = 0, 1, 2, \ldots$.

$$x_n = \kappa x_{n-1} = \kappa^n x_0$$

com x_0 sendo o valor inicial.

Exponencial: equação de diferenças

Coeficiente

Constante:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = rx(t)$$

assim $x(t+\Delta t) = \underbrace{(1 + r\Delta t)}_{\kappa} x(t)$. Perde-se a noção do que se passa no intervalo Δt.

Chamando $x_i = x(i\Delta t)$, com $i = 0, 1, 2, \ldots$.

$$x_n = \kappa x_{n-1} = \kappa^n x_0$$

com x_0 sendo o valor inicial.

Variável:

$$x_n = \prod_{i=1}^{n} \kappa_i x_0$$

Exponencial + Linear

Coeficientes:

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0$$

Exponencial + Linear

Coeficientes:

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \left(f_0 + \frac{r_1}{r_0}\right) e^{r_1(t-t_0)} - \frac{r_1}{r_0} \ ,$$

Exponencial + Linear

Coeficientes:

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \left(f_0 + \frac{r_1}{r_0}\right) e^{r_1(t-t_0)} - \frac{r_1}{r_0}\ ,$$

Um Constante e Um Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0(t)$$

Exponencial + Linear

Coeficientes:

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \left(f_0 + \frac{r_1}{r_0}\right) e^{r_1 (t - t_0)} - \frac{r_1}{r_0} \,,$$

Um Constante e Um Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = e^{r_1 t}[f_0 e^{-r_1 t_0} + \int_{t_0}^{t} dt' e^{-r_1 t'} r_0(t')] \,.$$

Exponencial + Linear

Coeficientes:

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \left(f_0 + \frac{r_1}{r_0}\right) e^{r_1(t-t_0)} - \frac{r_1}{r_0} \; ,$$

Um Constante e Um Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = e^{r_1 t}[f_0 e^{-r_1 t_0} + \int_{t_0}^{t} dt' e^{-r_1 t'} r_0(t')] \; .$$

Variáveis:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t) + r_0(t)$$

Exponencial + Linear

Coeficientes:

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \left(f_0 + \frac{r_1}{r_0}\right) e^{r_1(t-t_0)} - \frac{r_1}{r_0} \ ,$$

Um Constante e Um Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = e^{r_1 t}[f_0 e^{-r_1 t_0} + \int_{t_0}^{t} dt' e^{-r_1 t'} r_0(t')] \ .$$

Variáveis:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t) + r_0(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = g[r_1(t)][f_0 + \int_{t_0}^{t} dt' g[-r_1(t')] r_0(t')] \ .$$

Exponencial + Linear

Coeficientes:

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \left(f_0 + \frac{r_1}{r_0}\right) e^{r_1(t-t_0)} - \frac{r_1}{r_0} \ ,$$

Um Constante e Um Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = e^{r_1 t}[f_0 e^{-r_1 t_0} + \int_{t_0}^{t} dt' e^{-r_1 t'} r_0(t')] \ .$$

Variáveis:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t) + r_0(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = g[r_1(t)][f_0 + \int_{t_0}^{t} dt' g[-r_1(t')] r_0(t')] \ .$$

$$g[r(t)] = e^{\int_{t_0}^{t} dt'' r(t'')}$$

Exponencial + Linear: equação de diferenças

Coeficiente

Variável:

$$x_n = x_0 \prod_{i=1}^{n} \kappa_i + \sum_{j=1}^{n} h_j \prod_{i=j+1}^{n-1} \kappa_i \ .$$

Exponencial + Linear: equação de diferenças

Coeficiente

Variável:

$$x_n = x_0 \prod_{i=1}^{n} \kappa_i + \sum_{j=1}^{n} h_j \prod_{i=j+1}^{n-1} \kappa_i \ .$$

Constante: $\kappa_1 = \kappa_2 = \ldots = \kappa_n = \bar{\kappa}$ e $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = \bar{h}$

$$x_n \;=\; x_0 \bar{\kappa}^n + \bar{h}\frac{1-\bar{\kappa}^n}{1-\bar{\kappa}} = \left(x_0 - \frac{\bar{h}}{1-\bar{\kappa}}\right)\bar{\kappa}^n + \frac{\bar{h}}{1-\bar{\kappa}} \ .$$

Hiper-Exponencial

Coeficiente

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_{1-\lambda}[f(t)]^{1-\lambda}$$

Hiper-Exponencial

Coeficiente

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_{1-\lambda}[f(t)]^{1-\lambda} \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f_0\,\Big[1 + \lambda\,\underbrace{\frac{r_{1-\lambda}}{f_0^{\lambda}}}_{t_\lambda}(t - t_0)\Big]^{1/\lambda}.$$

Divergência em tempo finito t_λ!

Hiper-Exponencial

Coeficiente

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_{1-\lambda}[f(t)]^{1-\lambda} \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f_0\,[1 + \lambda\,\underbrace{\frac{r_{1-\lambda}}{f_0^{\lambda}}}_{t_\lambda}(t - t_0)]^{1/\lambda}\,.$$

Divergência em tempo finito t_λ!

Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_{1-\lambda}(t)[f(t)]^{1-\lambda}$$

Hiper-Exponencial

Coeficiente

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_{1-\lambda}[f(t)]^{1-\lambda} \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f_0\,[1 + \lambda\,\underbrace{\frac{r_{1-\lambda}}{f_0^{\lambda}}}_{t_\lambda}(t - t_0)]^{1/\lambda}\,.$$

Divergência em tempo finito t_λ!

Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_{1-\lambda}(t)[f(t)]^{1-\lambda} \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f_0\,[1+\lambda\int_{t_0}^{t} dt'\,\frac{r_{1-\lambda}(t')}{f_0^{\lambda}}]^{1/\lambda}\,.$$

Hiper-Exponencial Outras

Outras

Estendida: $r_{1-\lambda}(t) = \beta k t^{\beta-1}$

$$\frac{df(t)}{dt} = \beta k t^{\beta-1}[f(t)]^{1-\lambda}$$

Outras

Estendida: $r_{1-\lambda}(t) = \beta k t^{\beta-1}$

$$\frac{df(t)}{dt} = \beta k t^{\beta-1}[f(t)]^{1-\lambda} \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f_0 \left[1 + \lambda \frac{k}{f_0^{\lambda}}(t^{\beta} - t_0^{\beta})\right]^{1/\lambda} .$$

Hiper-Exponencial Outras

Outras

Estendida: $r_{1-\lambda}(t) = \beta k t^{\beta-1}$

$$\frac{df(t)}{dt} = \beta k t^{\beta-1}[f(t)]^{1-\lambda} \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f_0 \, [1 + \lambda \frac{k}{f_0^{\lambda}}(t^{\beta} - t_0^{\beta})]^{1/\lambda} \, .$$

hiper-Gompertz: $f(t) = \ln[g(t)]$

$$g(t) =$$

Hiper-Exponencial + Linear = Equação de Bernoulli

Coeficiente constante:

Coeficientes constantes

Equação geral

→ Não linear

→ Solução Analítica!!!

$$\frac{df(t)}{dt} = r_{1-\lambda} f^{1-\lambda}(t) + \tilde{r}_1 f(t) \,,$$

chamando $\boxed{v(t) = f^{\lambda}(t)}$, têm-se $dv(t)/dt = \lambda[\tilde{r}_1 v(t) + r_{1-\lambda}]$, cuja solução é: $v(t) = [v(t_0) + \tilde{r}_1/r_{1-\lambda}]e^{\tilde{r}_1(t-t_0)} - \tilde{r}_1 r_{1-\lambda}$. Assim, na variável original tem-se:

$$f(t) = \left\{ \frac{r_{1-\lambda}}{\tilde{r}_1} \left[1 + \left(\frac{\tilde{r}_1 f_0^{\lambda}}{r_{1-\lambda}} - 1 \right) e^{\lambda \tilde{r}_1 (t-t_0)} \right] \right\}^{1/\lambda} .$$

Para $\boxed{\lambda = -1}$, têm-se a equação de Riccati, ou logística, que descreve o modelo de Verhulst.

Equação logística ou modelo de Verhulst

Equação logística:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_2 f^2(t) + \tilde{r}_1 f(t) = \tilde{r}_1 f(t) \left[1 - \frac{-r_2}{\tilde{r}_1} f(t)\right] \ ,$$

Equação logística ou modelo de Verhulst

Equação logística:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_2 f^2(t) + \tilde{r}_1 f(t) = \tilde{r}_1 f(t) \left[1 - \frac{-r_2}{\tilde{r}_1} f(t)\right] \ ,$$

com solução:

$$f(t) = \frac{\tilde{r}_1/r_2}{1 + \left(\frac{\tilde{r}_1}{r_2 f_0} - 1\right)^{-\tilde{r}_1(t-t_0)}} \ .$$

Equação logística ou modelo de Verhulst

Equação logística:

$$\boxed{\frac{df(t)}{dt} = r_2 f^2(t) + \tilde{r}_1 f(t)} = \tilde{r}_1 f(t) \left[1 - \frac{-r_2}{\tilde{r}_1} f(t) \right] \ ,$$

com solução:

$$f(t) = \frac{\tilde{r}_1 / r_2}{1 + \left(\frac{\tilde{r}_1}{r_2 f_0} - 1 \right)^{-\tilde{r}_1 (t - t_0)}} \ .$$

Considere: $t_0 = 0$, $r_1 = r$, $-r_1/r_2 = K > 0$ e

$$\frac{df(t)}{dt} = rf(t) \left[1 - \frac{f(t)}{K} \right]$$

Equação logística ou modelo de Verhulst

Equação logística:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_2 f^2(t) + \tilde{r}_1 f(t) = \tilde{r}_1 f(t)\left[1 - \frac{-r_2}{\tilde{r}_1} f(t)\right] ,$$

com solução:

$$f(t) = \frac{\tilde{r}_1 / r_2}{1 + \left(\frac{\tilde{r}_1}{r_2 f_0} - 1\right)^{-\tilde{r}_1 (t - t_0)}} .$$

Considere: $t_0 = 0$, $r_1 = r$, $-r_1/r_2 = K > 0$ e

$$\frac{df(t)}{dt} = rf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = rf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right]$$

função logística!!! ...

$$f(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{f_0} - 1\right)^{-rt}} .$$

trabalhar com o modelo discreto
⇒ sistemas dinâmicos
⇒ modelos epidemiológicos

Eq. de diferenças do modelo de Verhulst $\rightarrow$ mapa logístico

$$\frac{df(t)}{dt} = rf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right]$$

Eq. de diferenças do modelo de Verhulst $\rightarrow$ mapa logístico

$$\frac{df(t)}{dt} = rf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = rf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right]$$

Eq. de diferenças do modelo de Verhulst $\rightarrow$ mapa logístico

$$\frac{df(t)}{dt} = rf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = rf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right]$$

assim $f(t+\Delta t) = f(t)(1 + r\Delta t)[1 - f(t)/K]$. Perde-se a noção do que se passa no intervalo Δt.

Eq. de diferenças do modelo de Verhulst $\rightarrow$ mapa logístico

$$\frac{df(t)}{dt} = rf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = rf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right]$$

assim $f(t+\Delta t) = f(t)(1 + r\Delta t)[1 - f(t)/K]$. Perde-se a noção do que se passa no intervalo Δt.

Chamando $y_i = f(i\Delta t)/K$, com $i = 0, 1, 2, \ldots$ leva à:
$y_{i+1} = y_i\,[1 + r\Delta t(1 - y_i)]$.

Eq. de diferenças do modelo de Verhulst $\rightarrow$ mapa logístico

$$\frac{df(t)}{dt} = rf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = rf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right]$$

assim $f(t + \Delta t) = f(t)(1 + r\Delta t)[1 - f(t)/K]$. Perde-se a noção do que se passa no intervalo Δt.

Chamando $y_i = f(i\Delta t)/K$, com $i = 0, 1, 2, \ldots$ leva à: $y_{i+1} = y_i\,[1 + r\Delta t(1 - y_i)]$. Escrevendo: $\rho = 1 + r\Delta t$ e $x_i = r\Delta t y_i/\rho$ escreve-se o mapa logístico:

Eq. de diferenças do modelo de Verhulst $\rightarrow$ mapa logístico

$$\frac{df(t)}{dt} = rf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = rf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right]$$

assim $f(t+\Delta t) = f(t)(1 + r\Delta t)[1 - f(t)/K]$. Perde-se a noção do que se passa no intervalo Δt.

Chamando $y_i = f(i\Delta t)/K$, com $i = 0, 1, 2, \ldots$ leva à: $y_{i+1} = y_i\,[1 + r\Delta t(1 - y_i)]$. Escrevendo: $\rho = 1 + r\Delta t$ e $x_i = r\Delta t y_i/\rho$ escreve-se o mapa logístico:

$$\boxed{x_{n+1} \quad = \quad \underbrace{\rho}_{4a} x_n(1 - x_n)}$$

Essa fórmula de recorrência é muito simples, mas que apresenta um comportamento muito rico.

Dinâmica populacional

Curiosidade → Efeito Allee

cooperação

Equação Kolmogorov, Petrovisk e Piskunov com coeficientes constantes:

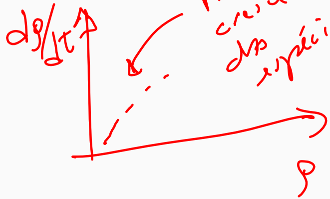
Eq. de Bernoulli

Dinâmica de populações

$$\frac{df(t)}{dt} = r_3 f^3(t) + r_2 f^2(t) + r_1 f(t) \ ,$$

Aparece em diversos contextos na modelagem: efeito Allee e quando considera-se a variável espacial: equação de Fisher-KPP.

Favorece o crescimento da espécie



Modelos de Fisher-KPP

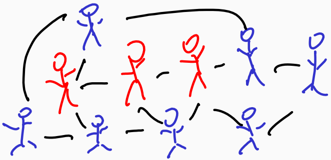
Modelos Epidemiológicos

Modelos Epidemiológicos

- A utilização de métodos matemáticos para estudar a disseminação de doenças contagiosas vem desde 1760, quando Daniel Bernoulli realizou estudos sobre a varíola.

Modelo Susceptível-Infectado (SI)

mais simples



N_S

N_I

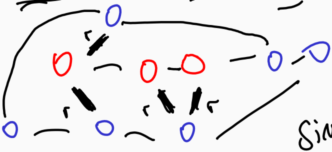
$N = N_I + N_S$

fixo, constante

Compartimentos: indivíduos que

Infectados: N_I podem transmitir um patógeno e não se curam.

Modelo de Agentes



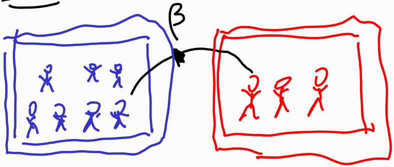
Simulação numérica

S ou I

Nodos ou vértices ⇒ GRAFOS

Ligações

Modelo compartimental



N_S N_I

cte $= N = N_S + N_I$

Modelo Susceptível-Infectado (SI)

Compartimentos: indivíduos que

Infectados: N_I podem transmitir um patógeno e não se curam.

Susceptíveis: N_S não carregam o patógeno e podem se infectar

Modelo Susceptível-Infectado (SI)

Compartimentos: indivíduos que

Infectados: N_I podem transmitir um patógeno e não se curam.

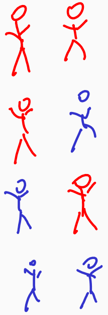
Susceptíveis: N_S não carregam o patógeno e podem se infectar

Total: totalizam $N = N_I + N_S$, com N fixo.

Modelo Susceptível-Infectado (SI)

Suponha que:

- o patógeno espalha-se pelo contato entre indivíduos infecciosos (I) e sãos (S) da população.



NADA ACONTECE

existe a chance do infectado transmitir o patógeno ao suscetível!!

NADA ACONTECE

Modelos com interação de 2 "corpos"

Modelo Susceptível-Infectado (SI)

Suponha que:

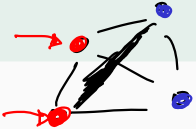
Modelos de contato(!)...

- o patógeno espalha-se pelo contato entre indivíduos infecciosos (I) e sãos (S) da população.
- indivíduos de ambos os grupos movem-se livremente entre si., O número de contatos é porporcional a $N_I N_S$, (cada indivíduo infeccioso pode encontrar, com a mesma probabilidade, com os N_S indivíduos susceptíveis).

Modelo mais simples, tem solução analítica para um grafo completo (lei de Ação das MASSA)

Modelo Susceptível-Infectado (SI)

Grafo completo



Suponha que:

- o patógeno espalha-se pelo contato entre indivíduos infecciosos (I) e sãos (S) da população.
- indivíduos de ambos os grupos movem-se livremente entre si., O número de contatos é porporcional a $N_I N_S$, (cada indivíduo infeccioso pode encontrar, com a mesma probabilidade, com os N_S indivíduos susceptíveis).

lei de ação das massas

A taxa de disseminação do patógeno é proporcional ao número de tais contatos assim:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t}$$

$$\frac{dN_I}{dt} = \underbrace{\beta}_{\text{taxa de contatos}} N_I N_S \,.$$

com $\beta > 0$.

Variação com relação ao tempo !!

Modelo Susceptível-Infectado (SI)

Não se considera quem são os agentes infectados ou susceptíveis

mas a quantidade deles !!!

$$\boxed{N_S} \xrightarrow{\beta>0} \boxed{N_I}$$

Não tem a informação entre

a conexão entre os agentes

(todo mundo interconectado)

Modelo Susceptível-Infectado (SI)

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(N_I + N_S)}_{N = cte} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dN_I}{dt} = +\beta N_I N_S \\[2ex] \dfrac{dN_S}{dt} = -\beta N_I N_S \end{cases}$$

Proporções:

infectados: $I = \frac{N_I}{N}$,

susceptíveis: $S = \frac{N_S}{N}$,

assim: $I + S = 1$.

$$\frac{dI}{dt} = \underbrace{\beta \overbrace{N}^{cte}}_{\tilde{\beta}} I(1-I)$$

Os modelos mais realistas consideram que a taxa de disseminação é proporcional a proporção de indivíduos infectados assim:

$$N_S \xrightarrow{\beta>0} N_I$$

$$\frac{dN_I}{dt} = -\underbrace{\beta I}_{\text{força da infecção}} N_S \,. \qquad (1)$$

$$\frac{N}{N} = \frac{N_I}{N} + \frac{N_S}{N} \quad \to 1 = I + S$$

$$\frac{dN_I}{dt}\Big/N = \beta N_I (N - N_I) = \beta N N_I - \beta N N_I^2 / N^2$$

$/N$ modelo de Verhulst

Como $S = 1 - I$:

$$\boxed{\underbrace{\frac{dI}{dt}}_{\text{taxa de disseminação}} = \beta' I(1-I)\,,} \qquad (2)$$

equação de Riccati

$1 \leq N_I(0) \leq N$

Modelo SI: Equação do tipo Verhulst

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = \beta' I(1 - I)}\ ,$$

tempos longos!!

com $I(0) = I_0$ sendo a condição inicial.

$$\frac{dI}{dt} = 0 = \beta' I^*(1 - I^*)$$

$$I^* = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Solução

Estacionária $I^* = 0$ (instável, pois $\beta > 0$) e $I^* = 1$.

Regime estacionário

Completa Equação logística

$$I(t) = \frac{1}{1 + (I_0^{-1} - 1)e^{-\beta t}}\ ,$$

$t \to \infty$

$$I(t \to \infty) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

tempo medido em unidades de β ($\tau = \beta t$). Para $t \gg 1/\beta$, $I(\infty) = I^* = 1$ (toda população infectada).

$t \gg 1/\beta$ — $I(\infty) = I^* = 1$ $I_0 \neq 0$

Modelo Susceptível-Infectado (SI)

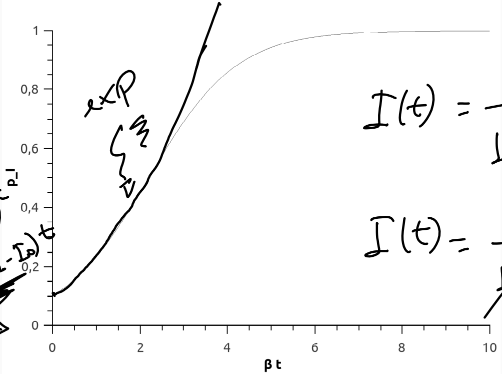
$t \gg 1/\beta \quad e^{-\beta t} \to 0$

$I(t) = 1$

Equação logística

$$I(t) = \frac{1}{1 + (I_0^{-1} - 1)e^{-\beta t}},$$

$t \ll \frac{1}{\beta} \quad e^{-\beta t} = 1 - \beta t$



$I(t) = \frac{I_0}{1 - \beta(1 - I_0)t}$

$= I_0 e^{-\beta(1-I_0)t}$

$I(t) = \frac{1}{1 + (1/I_0 - 1)(1 - \beta t)}$

$I(t) = \frac{1}{1 + (1/I_0 - 1) - \beta(1/I_0 - 1)t}$

$= \frac{1}{1/I_0 - \beta(1/I_0 - 1)t}$

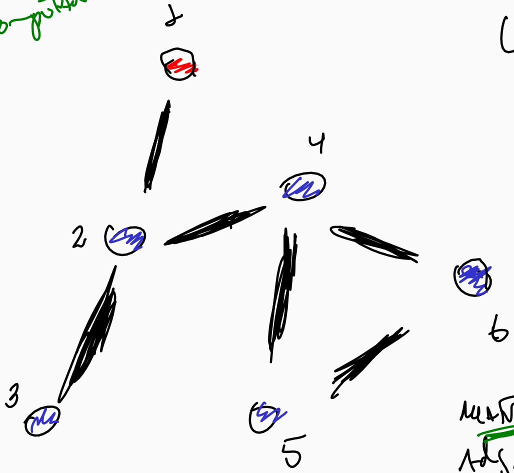
Equação logística com $I_0 = 1/10$.

Modelo de Agentes Susceptível-Infectado (SI)

CONSIDERAR A ESTRUTURA de CONEXÃO entre OS AGENTES

- Considere *N* agentes, que são os nodos de um grafo;

Modelo Computacional



GRAFO = Nós + Ligações

Matriz de Adjacência

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & & & & & & \\ 2 & & & & & & \\ 3 & & & & & & \\ 4 & & & & & & \\ 5 & & & & & & \\ 6 & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

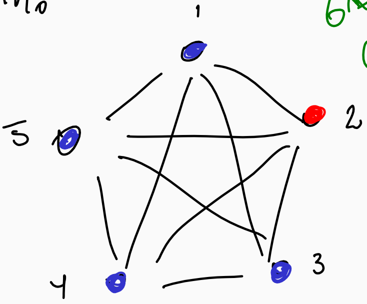
Modelo de Agentes Susceptível-Infectado (SI)

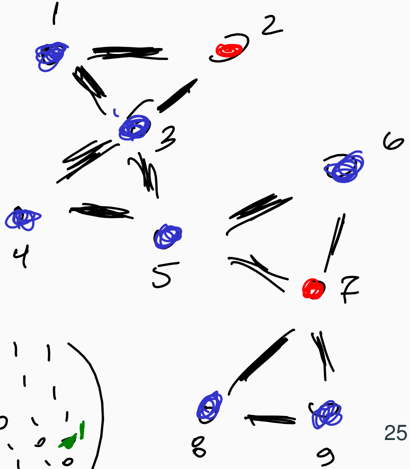
- Considere N agentes, que são os nodos de um grafo;
- o i-ésimo agente podem estar no estado:
  - susceptível $a_i = 0$ ou
  - infectado $a_i = 1$;

$N = 5$

$n_0 = 1$

Grafo completo





Grafo completo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matriz de adjacência

Modelo de Agentes Susceptível-Infectado (SI)

- Considere N agentes, que são os nodos de um grafo;
- o i-ésimo agente podem estar no estado:
  - susceptível $a_i = 0$ ou
  - infectado $a_i = 1$;
- a conexão entre os agentes i e j é representada por:
  - $A_{i,j} = 0$, se eles não estiveram conectados, ou por
  - $A_{i,j} = 1$, caso contrário;

Modelo de Agentes Susceptível-Infectado (SI)

- Considere N agentes, que são os nodos de um grafo;
- o i-ésimo agente podem estar no estado:
  - susceptível $a_i = 0$ ou
  - infectado $a_i = 1$;
- a conexão entre os agentes i e j é representada por:
  - $A_{i,j} = 0$, se eles não estiveram conectados, ou por
  - $A_{i,j} = 1$, caso contrário;
- no instante t, a probabilidade do i-ésimo agente estar no estado:
  - susceptível é $\boxed{s_i(t)}$ e de estar
  - infectado é $\boxed{x_i(t)}$,

  com $s_i(t) + x_i(t) = 1$;

próxima aula.

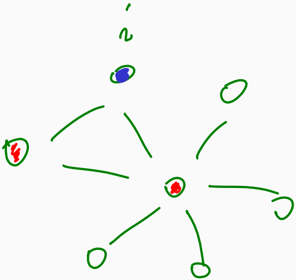
modelagem analítica

- em um intervalo de tempo Δt, um agente susceptível pode ser contaminado por um de seus vizinhos infectados com probabilidade:

dt

$$P_{inf}(t) = \beta s_i(t) \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} x_j(t) \Delta t \; ;$$

Prob. de um infecção de agente susceptível por um infectado no instante "t"



Modelo de Agentes Susceptível-Infectado (SI)

- em um intervalo de tempo Δt, um agente susceptível pode ser contaminado por um de seus vizinhos infectados com probabilidade:

Modelo discreto!

Modelo contínuo

$$P_{inf} = \beta s_i(t) \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} x_j(t) \Delta t \; ;$$

$x_i(t+\Delta t) = x_i(t) + P_{inf}(t)$

- assim:

$\frac{x_i(t+\Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} \approx \frac{dx_i}{dt}$

$$x_i(t+\Delta t) = x_i(t) + \beta \overbrace{\boxed{[1 - x_i(t)]}}^{S_i} \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} x_j(t) \Delta t \; ;$$

Modelo computacional

Modelo de Agentes Susceptível-Infectado (SI)

- em um intervalo de tempo Δt, um agente susceptível pode ser contaminado por um de seus vizinhos infectados com probabilidade:

Uma única infecção

Processo Poissônico

$$P_{inf} = \beta s_i(t) \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} x_j(t) \Delta t \; ;$$

$x_j . x_k$ dupla infecção

$x_j . x_k x_e$ tripla!

- assim:

$$\underbrace{x_i(t + \Delta t)}_{\text{Estado futuro}} = x_i(t) + \underbrace{\beta [1 - x_i(t)] \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} x_j(t) \Delta t}_{\text{Estado atual}} \; ;$$

- Sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \beta [1 - x_i(t)] \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} x_j(t) \; .$$

Processo Markoviano!!

Poissônico

Modelo de Agentes Susceptível-Infectado (SI)

volta ao modelo contínuo

- Sistema: $\dot{x}_i(t) = \beta[1 - x_i(t)] \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} x_j(t)$.

Modelo de Agentes Susceptível-Infectado (SI)

- Sistema: $\dot{x}_i(t) = \beta[1 -$ [redacted] $]\sum_{j=1}^{N} A_{i,j} x_j(t)$.
- Para tempos curtos $\boxed{t \ll 1/\beta} \Longrightarrow$ sistema linear: $\dot{x}_i(t) = \beta \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} x_j(t)$:

$1/\beta \leftarrow$ tempo característico do sistema!!!

$$\boxed{\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \beta \mathbb{A} \vec{x}(t)};$$

sistema de EDL de primeira ordem.

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix}^t$$

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \begin{pmatrix} A_{01} & A_{02} & \dots & A_{0N-1} \\ A_{10} & A_{11} & \dots & A_{1N-1} \\ \vdots & \ddots & & \ddots \\ A_{N-1,0} & A_{N-1,1} & \dots & A_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}^t$$

Modelo de Agentes Susceptível-Infectado (SI)

- Sistema: $\dot{x}_i(t) = \beta[1 - x_i(t)] \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} x_j(t)$.
- Para tempos curtos $t \ll 1/\beta \implies$ sistema linear: $\dot{x}_i(t) = \beta \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} x_j(t)$:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \beta \mathbb{A} \vec{x}(t) \; ;$$

matriz simétrica $\Longrightarrow$ Autovalores $\in \mathbb{R}$ e Autovetores ortogonais!!!

- a solução na base de autovetores de $\mathbb{A}$: $\mathbb{A}\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$ é:

$$\vec{x}(t) = \beta \sum_{k=1}^{N} a_k(t) \vec{v}_k \; ;$$

Modelo de Agentes Susceptível-Infectado (SI)

- Sistema: $\dot{x}_i(t) = \beta[1 - x_i(t)] \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} x_j(t)$.
- Para tempos curtos $t \ll 1/\beta \implies$ sistema linear:
  $\dot{x}_i(t) = \beta \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} x_j(t)$:

Sistema ACOPLADO

$$\boxed{\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \beta \mathbb{A} \vec{x}(t)} \; ;$$

- a solução na base de autovetores de $\mathbb{A}$: $\mathbb{A}\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$ é:

$$\vec{x}(t) = \beta \sum_{k=1}^{N} a_k(t) \vec{v}_k \; ;$$

- $\sum_{k=1}^{N} \dot{a}_k(t)\vec{v}_k = \beta \sum_{k=1}^{N} a_k(t)\mathbb{A}\vec{v}_k = \beta \sum_{k=1}^{N} a_k(t)\lambda_k \vec{v}_k$
  assim:

sistema desacoplado

$$\boxed{\frac{da_k(t)}{dt} = \beta\lambda_k a_k(t)} , \quad a_k(t) = a_k(0)e^{\beta\lambda_k t} \quad a_k(0) = \vec{v}_k^{\dagger} \cdot \vec{x}(0)$$

desacoplou as EDO's.

Modelo de Agentes Susceptível-Infectado (SI)

- Assim:

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k(0) e^{\beta \lambda_k t} \vec{v}_k \ .$$

$$n_I(t) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i(t)$$

[1] https://youtu.be/GVTDWQEXZj0

Modelo de Agentes Susceptível-Infectado (SI)

- Assim:

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k(0) e^{\beta \lambda_k t} \vec{v}_k \ .$$

Início do contágio!!

- Sendo λ_1 o maior auto valor:

$$\boxed{\vec{x}(t) = a_1(0) e^{\beta \lambda_1 t} \vec{v}_1}$$

- O autovetor $\vec{v}_1$ relativo ao maior autovalor é a medida de centralidade do~~s~~ grafo.[1]

[1] https://youtu.be/GVTDWQEXZj0

TODO MUNDO !!!

PARA $t \gg 1/\beta \Longrightarrow$ INFECTADO...

Modelo Susceptível-Infectado-Susceptível (SIS)

- Modelo SI: compartimentos: indivíduos que

  Infectados N_I podem transmitir um patógeno

  Susceptíveis N_S não carregam o patógeno e podem se infectar

  Total totalizam $N = N_I + N_S$, com N fixo.

- Indivíduos infectados podem se curar a uma taxa γ

$$\begin{tikzcd} \boxed{1 - I} \arrow[r, bend left, "\boxed{\beta>0}"] & \boxed{I} \arrow[l, bend left, "\boxed{\gamma>0}"] \end{tikzcd}$$

SIS = SI

$\gamma = 0$

Modelo SIS:

$$\frac{dI}{dt} = \overbrace{\beta I(1 - I)}^{\text{INFECÇÃO}} - \overbrace{\gamma I}^{\text{CURA}}$$

com $I(0) = I_0$ sendo a condição inicial.

Modelo Susceptível-Infectado-Susceptível (SIS)

$\gamma = 0 \Rightarrow R_0 \rightarrow \infty$ TODO MUNDO INFECTADO

Modelo SIS:

$$\frac{dI}{d(\underbrace{\beta t}_{\tau})} = I\left(1 - \underbrace{\frac{\gamma}{\beta}}_{1/R_0} - I\right) ,$$

com

- $I(0) = I_0$ sendo a condição inicial e
- $R_0 = \beta/\gamma$ número médio que de suceptíveis que podem ser infectados por um indivíduo infectado.

Modelo Susceptível-Infectado-Susceptível (SIS)

Modelo SIS: $\frac{dI}{d\tau} = I\left(1 - \frac{\gamma}{\beta} - I\right)$

$\frac{dI}{dt} = 0$

$I^*\left(1 - \frac{\gamma}{\beta} - I^*\right) = 0$

Solução:

$I^* = 0$

$I^* = 1 - \gamma/\beta$

Estacionária : estabilidade de

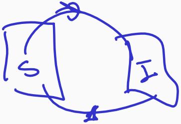
proporção da população infectada

- $I^* = 0$, se $\frac{\gamma}{\beta} > 1$ e
- $I^* = 1 - \frac{\gamma}{\beta}$, se $\frac{\gamma}{\beta} < 1$

Completa Equação

$$I(t) = \frac{1 - \frac{\gamma}{\beta}}{1 + \left(\frac{1 - \frac{\gamma}{\beta}}{I_0} - 1\right)e^{-(1 - \frac{\gamma}{\beta})\beta t}},$$

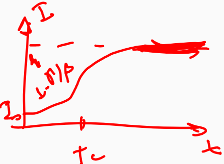
MUDA o tempo característico t_c

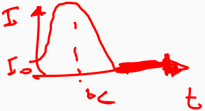


tempo medido em unidades de β ($\tau = \beta t$). Para $t \gg 1/\beta$, se

- $\frac{\gamma}{\beta} > 1$, $I(\infty) = 0$ (toda população curada, extinção do patógeno) e
- se $\frac{\gamma}{\beta} < 1$, $I(\infty) = 1 - \frac{\gamma}{\beta}$.

GEOGEBRA





Modelo Susceptível-Infectado-Recuperado (SIR)

- Modelo SI: compartimentos: indivíduos que

  Infectados N_I podem transmitir um patógeno

  Susceptíveis N_S não carregam o patógeno e podem se infectar

  Recuperado podem se curar, ficando imunes, (ou morrem) a uma taxa $\gamma > 0$

  Total totalizam $N = N_I + N_S + N_R$, com N fixo.

$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta>0} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma>0} \boxed{R}$$

Modelo Susceptível-Infectado-Recuperado (SIR)

$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta>0} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma>0} \boxed{R}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dN_S}{dt} &= -\beta N_S \frac{N_I}{N} \\
\frac{dN_I}{dt} &= \beta N_S \frac{N_I}{N} - \gamma N_I \\
\frac{dN_R}{dt} &= \gamma N_I
\end{aligned}$$

com $N = N_I + N_S + N_R$ e condição inicial $N_S(0)$, $N_I(0)$ e $N_R(0)$ especificados.

Modelo Susceptível-Infectado-Recuperado (SIR)

$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta>0} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma>0} \boxed{R}$$

- $\tau = \beta t$
- $R_0 = \beta/\gamma$ (número básico de reprodução)
- $S = \frac{N_S}{N}$, $I = \frac{N_I}{N}$ e $R = \frac{N_R}{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{d\tau} &= -SI \\
\frac{dI}{d\tau} &= SI - R_0^{-1} I \\
\frac{dR}{d\tau} &= R_0^{-1} I
\end{aligned}$$

com $S + I + R = 1$ e condição inicial $S(0)$, $I(0)$ e $R(0)$ especificados.

Modelo Susceptível-Infectado-Recuperado (SIR)

$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta>0} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma>0} \boxed{R}$$

Trabalhando com duas equações: $I = 1 - (S + R)$ e $I(0) = 1 - [S(0) - R(0)]$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\tau} &= -S(1 - S - R) \\ \frac{dR}{d\tau} &= R_0^{-1}(1 - S - R) \end{aligned}$$

Modelo Susceptível-Infectado-Susceptível (SIS)

Modelo SIR: $\frac{dS}{d\tau} = -S(1 - S - R)$ e $\frac{dR}{d\tau} = R_0^{-1}(1 - S - R)$

Solução Estacionária:

- $S^* = 0$,
- $R^* = 1 - S^*$,

Se

- $S^* = 0 \quad \longrightarrow \quad R^* = 1$ (todos recuperados)
- $S^* \neq 0 \quad \longrightarrow \quad R^* = 1 - S^*$ (ainda existem susceptíveis)

Reescrevendo: $\frac{dI}{d\tau} = (S - R_0^{-1})I$

Para $\tau = 0$ se $R_0 > 1/S(0)$ surto epidêmico (crescimento exponencial de infectados)

Modelos Computacionais

Modelos Estocásticos