Capítulo 23 do Tipler (6ª edição)
Potencial Elétrico

Neste capítulo, será introduzida a energia potencial elétrica e o conceito de um campo potencial elétrico escalar que está relacionado diretamente ao campo elétrico.

23-1 Diferença de potencial

Assim como a força gravitacional, a força elétrica é conservativa e, portanto, há uma função energia potencial U associada a ela.

Se o ponto de aplicação de uma força conservativa $\vec{F}$ sofrer um deslocamento $d\vec{\ell}$, a variação na função energia potencial U associada a este deslocamento é dada por

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Se a força conservativa é exercida pelo campo eletrostático $\vec{E}$ em uma carga puntiforme q , então a força é dada por

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

e se a carga puntiforme q sofrer um deslocamento $d\vec{\ell}$, a variação correspondente na energia potencial eletrostática é dada por

$$dU = -q\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

A variação da energia potencial associada ao deslocamento de uma carga teste q_0 que sofre um deslocamento $d\vec{\ell}$ é dada por

$$dU = -q_0\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Assim, a variação da energia potencial é proporcional à carga teste. Então, podemos definir uma grandeza denominada diferença de potencial dV dada por

$$dV = \frac{dU}{q_0} = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Para um deslocamento finito do ponto *a* para o ponto *b*, a variação no potencial é

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

A diferença de potencial $V_b - V_a$ é o negativo do trabalho por unidade de carga, realizado pelo campo elétrico em uma carga teste quando ela se move do ponto *a* para o ponto *b* (ao longo de qualquer caminho).

Lembre que a carga teste é uma carga puntiforme cuja magnitude é tão pequena que são desprezíveis as forças em outras cargas. E ainda, por conveniência, as cargas teste são sempre positivas.

Assim a relação entre a energia potencial *U* e o potencial elétrico *V* é

$$U = q_0 V$$

Diferentemente do campo elétrico, o potencial elétrico *V* é uma função escalar, enquanto o campo elétrico é uma função vetorial.

Continuidade do potencial elétrico *V*

No Capítulo 22, vimos que o campo elétrico é descontínuo de um valor de $\sigma\varepsilon_0$ em pontos onde há uma densidade superficial de carga σ (densidade volumétrica infinita).

A função potencial, por outro lado, é contínua em todos os pontos, exceto nos pontos onde o campo elétrico é infinito (local ocupados por uma carga puntiforme ou uma linha de cargas).

Podemos entender este resultado partindo da definição de potencial:

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b E_{\parallel} d\ell$$

Se $\vec{E}$ é finito em cada um dos dois pontos *a* e *b* e ao longo do segmento de reta de comprimento infinitesimal $d\ell$, então ΔV pode ser infinitesimal (tão pequeno quanto se queira). Portanto, a função potencial *V* é contínua em qualquer ponto não ocupado por uma carga puntiforme ou por uma linha de cargas (que geram campos infinitos em sua localização).

Unidades para potencial elétrico

O potencial elétrico é a energia potencial por unidade de carga, assim a unidade para o potencial no SI é o joule por coulomb, denominada volt (V):

$$1\ \text{V} = 1\ \text{J/C}$$

A diferença de potencial entre dois pontos (medida em volts) é comumente chamada de voltagem entre os dois pontos.

Mas, pela definição de diferença de potencial elétrico

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

podemos ver que as dimensões do potencial também são de campo elétrico vezes distância, portanto, a unidade do campo elétrico também pode ser um volt por metro 1 N/C = 1 V/m.

Na física atômica e nuclear, frequentemente temos partículas que têm cargas de magnitude *e*, tais como elétrons e prótons, movendo-se através de diferenças de potencial.

Como 1 J = 1 C · 1 V, podemos definir uma unidade de energia como o produto da unidade fundamental de carga *e* e 1 V.
Esta unidade particularmente útil é denominada elétron-volt (eV).

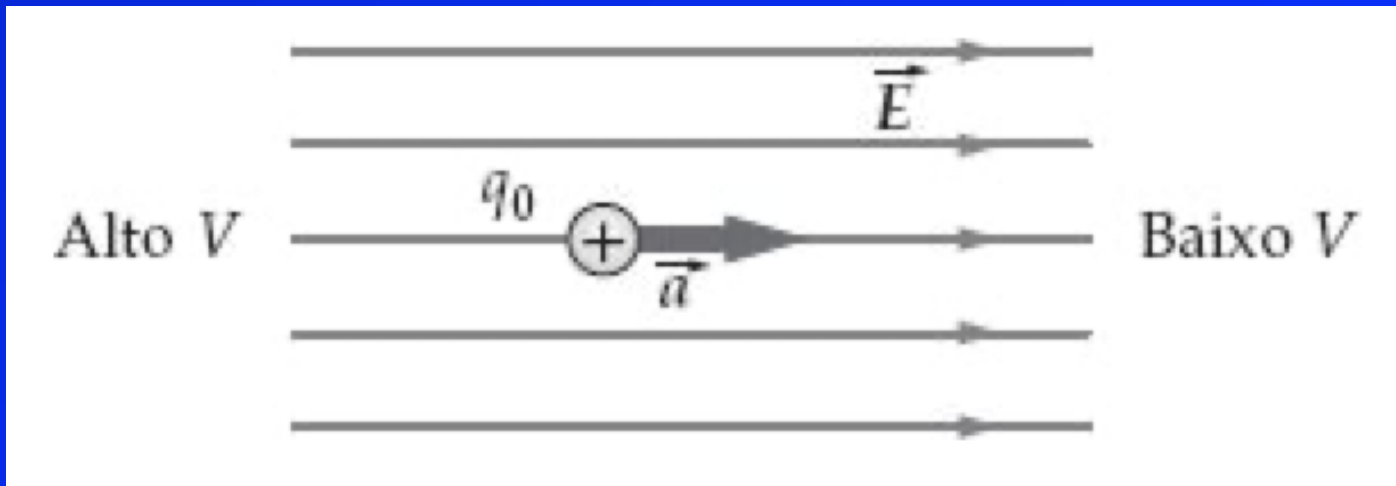
A conversão entre eV e J é

$$1\ \text{eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C} \cdot \text{V} = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Por exemplo, um elétron movendo-se do terminal negativo para o terminal positivo de uma bateria de 12 V para carros perde 12 eV de energia potencial.

Potencial e campo elétrico

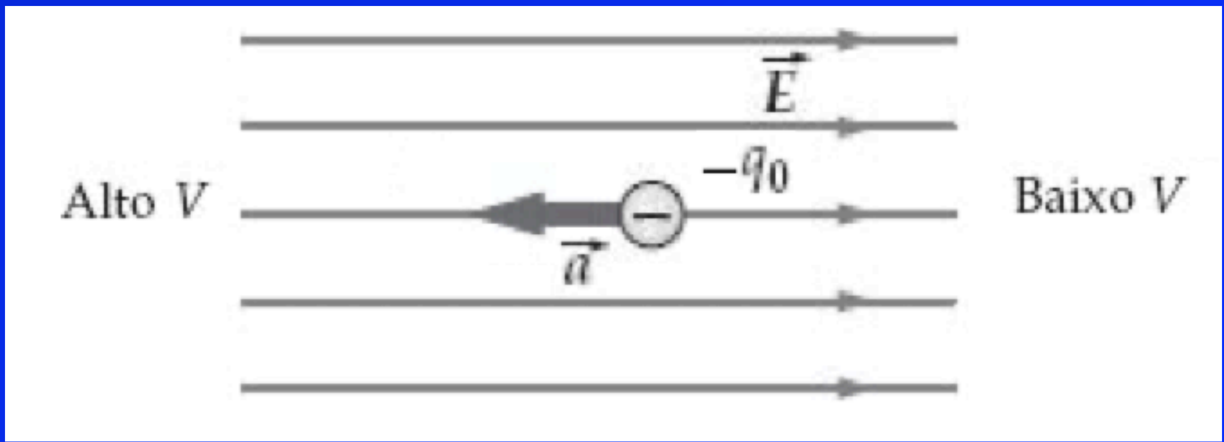
Se colocarmos uma carga positiva q_0 em um campo elétrico e a soltarmos, ela será acelerada na direção e sentido de $\vec{E}$.
Como a energia cinética da carga aumenta,
sua energia potencial diminui.
A carga, portanto, é acelerada em direção à região onde sua energia potencial elétrica é menor.
Mas $U = qV$, assim, uma carga positiva é acelerada na direção e sentido de uma região de menor potencial elétrico V.



Aí vem a pergunta: Se você colocar uma carga negativa em um campo elétrico, ela será acelerada na direção e sentido na qual o potencial aumenta ou diminui?

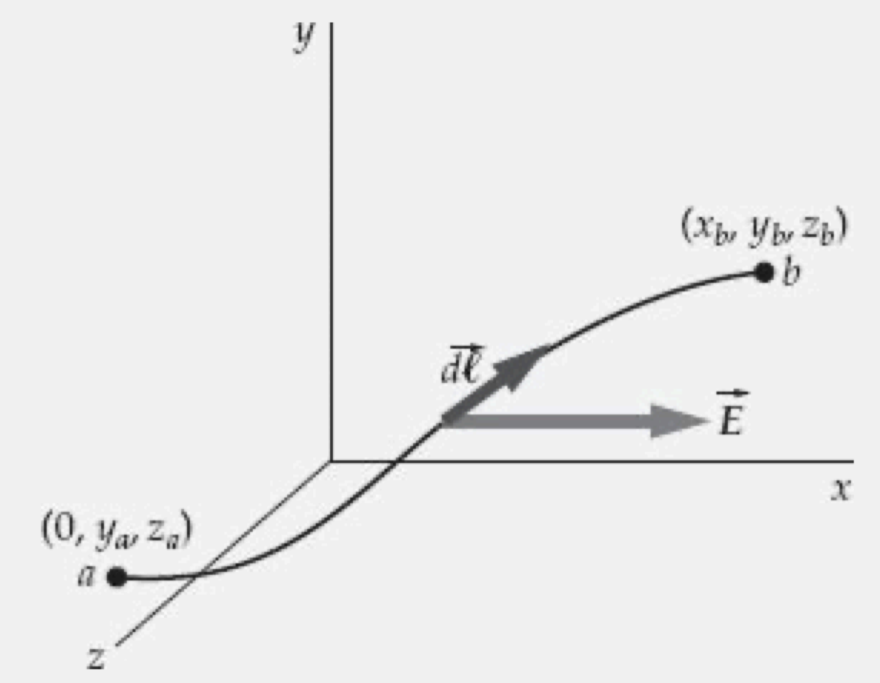
Ela será acelerada na direção e sentido na qual o potencial aumenta.

Pois U_f - U_i = q (V_f – V_i) onde q < 0, então a partícula será acelerada no sentido em que a energia potencial diminui e o potencial aumenta, e o sinal negativo da carga q "acerta" isso na equação.



Exemplo 23-1 Determine V para $\vec{E}$ uniforme

Um campo eletrostático uniforme aponta na direção $+x$ e tem módulo igual a $E = 10$ N/C = 10 V/m. Determine o potencial como uma função de x, considerando que V = 0 em $x = 0$.



Sabemos que $$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

mas $$\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E\hat{i}\cdot(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}) = E\,dx$$

assim $$V_b - V_a = -\int_{x_a}^{x_b} E\,dx$$

e, portanto $$V_b - 0 = -E\int_0^{x_b} dx \quad \text{então} \quad V_b = -Ex_b$$

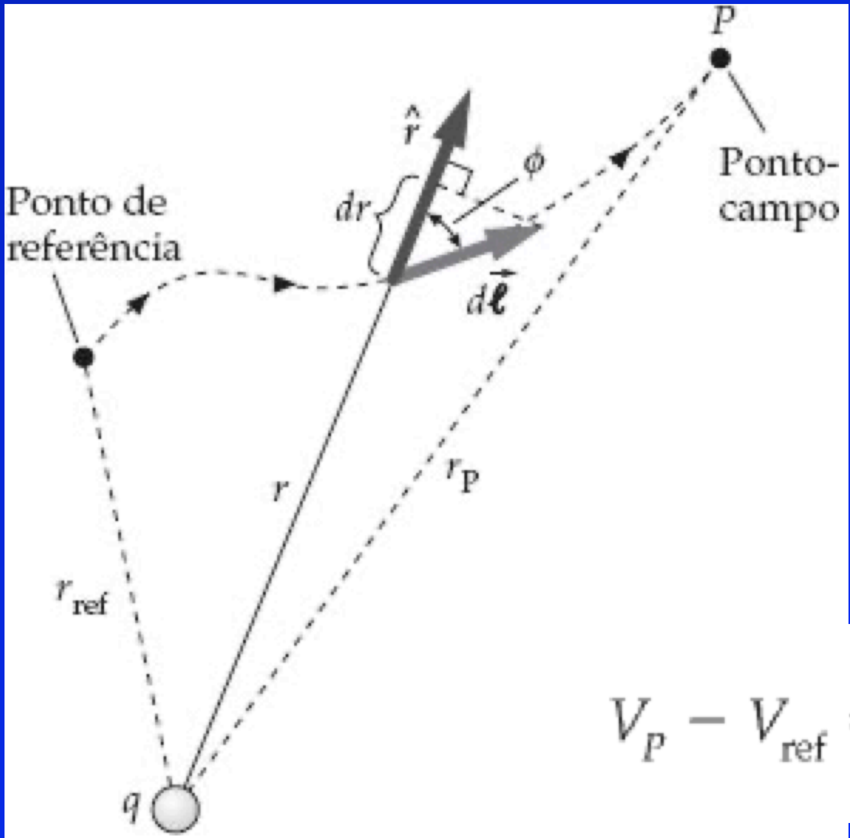
assim $$V(x) = -Ex = \boxed{-(10\text{ V/m})x}$$

23-2 Potencial devido a um sistema de cargas puntiformes

Comecemos com o potencial devido a uma carga puntiforme.
O potencial elétrico, a uma distância *r*, de uma carga puntiforme *q* na origem pode ser calculado usando a definição de potencial

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

onde, no ponto de referência, o potencial é igual a V_{ref}, e *P* é um ponto arbitrário onde calculamos o campo (veja figura).



O campo elétrico devido à carga puntiforme é dado por

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

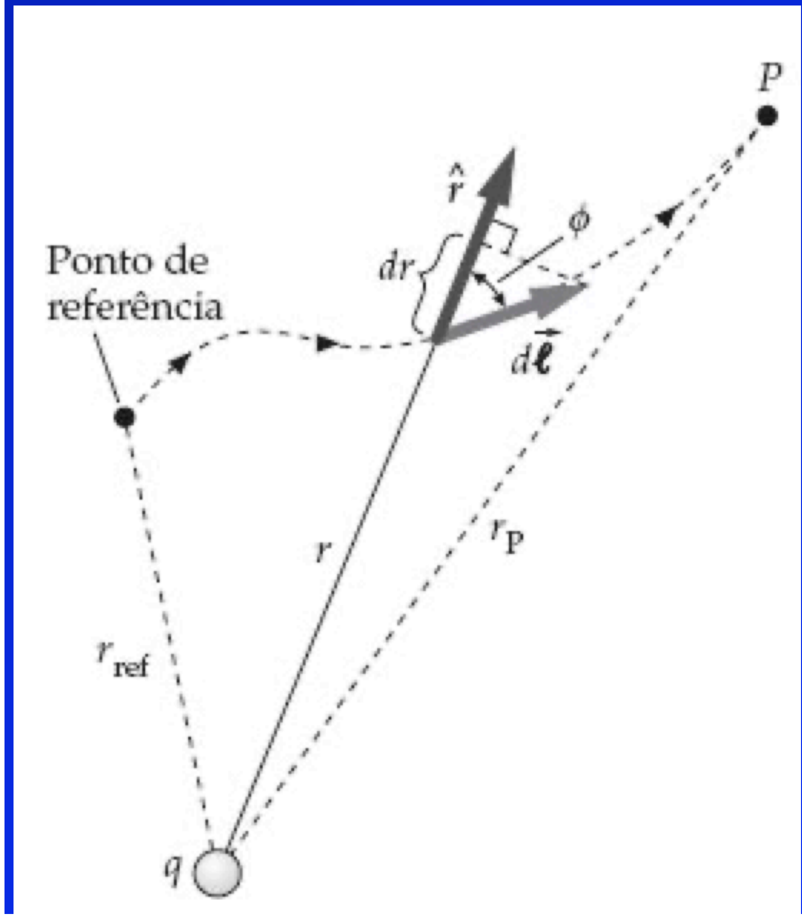
que, substituindo na definição de potencial

$$V_P - V_{ref} = -\int_{ref}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{ref}^{P} \frac{kq}{r^2}\hat{r} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{r_{ref}}^{r_P} \frac{kq}{r^2}\, dr$$

$$V_P - V_{ref} = -\int_{ref}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{ref}^{P} \frac{kq}{r^2}\hat{r} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{r_{ref}}^{r_P} \frac{kq}{r^2} dr$$

onde $dr = \hat{r} \cdot d\vec{\ell}$ é a variação na distância r associada ao deslocamento $d\vec{\ell}$.

Considerando $V_{ref} = 0$ e integrando ao longo de um caminho desde um ponto arbitrário de referência até um ponto arbitrário de campo, obtemos



$$V_P - 0 = -\int_{ref}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -kq\int_{r_{ref}}^{r_P} \frac{1}{r^2} dr = \frac{kq}{r_P} - \frac{kq}{r_{ref}}$$

Assim, o potencial devido a uma carga puntiforme é

$$V = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r_{ref}}$$

Potencial de uma carga puntiforme: $$V = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r_{\text{ref}}}$$

Temos liberdade para escolher a localização do ponto de referência, portanto, o escolhemos de maneira a conduzir à forma algébrica mais simples para o potencial.

Escolhendo o ponto de referência infinitamente afastado da carga (ou seja, $r_{ref} \to \infty$) satisfizemos a esta condição, obtendo então

$$V = \frac{kq}{r}$$

Potencial de Coulomb, onde ele é positivo ou negativo, dependendo se q é positiva ou negativa.

A energia potencial de uma carga puntiforme q' localizada a uma distância r de uma carga puntiforme q é

$$U = q'V = q'\frac{kq}{r} = \frac{kq'q}{r}$$

que é a energia potencial eletrostática de um sistema de 2 cargas, relativa a $U = 0$ a uma separação infinita.

Energia potencial eletrostática de um sistema de 2 cargas, relativa a $U = 0$ a uma separação infinita:

$$U = q'V = q'\frac{kq}{r} = \frac{kq'q}{r}$$

O trabalho que um agente externo deve realizar para mover uma carga teste q_0 a partir do repouso no infinito para o repouso no ponto P, a uma distância r de q , é kq_0q/r.

Escolher a energia potencial eletrostática de duas cargas puntiformes como zero a uma separação infinita, corresponde a considerar que, com essa separação, elas não estão interagindo, o que é razoável.

Exemplo 23-2 Energia potencial de um átomo de hidrogênio

(a) Qual é o **potencial elétrico** a uma distância $r_0 = 0{,}529 \times 10^{-10}$ m de um próton? Esta é a distância média entre o próton e o elétron em um átomo de hidrogênio.

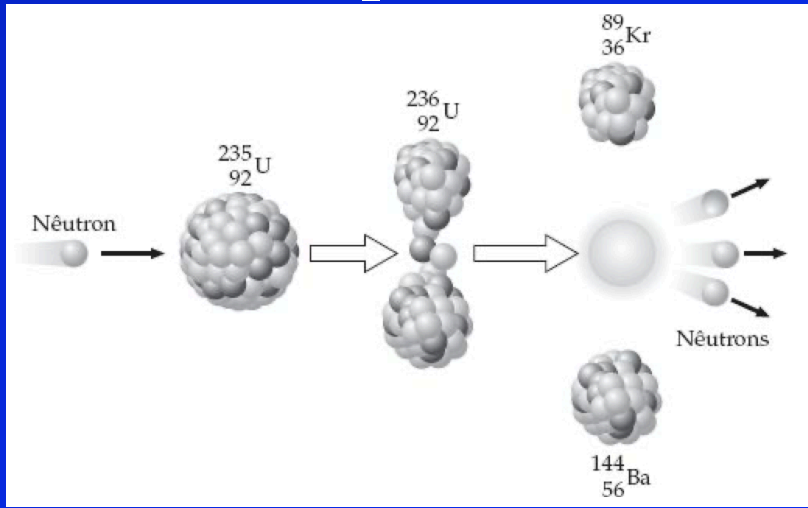
(b) Qual é a **energia potencial elétrica** de um elétron e de um próton a esta separação?

(a)
$$V = \frac{kq}{r_0} = \frac{ke}{r_0} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})}{0{,}529 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}}$$
$$= 27{,}2\ \mathrm{N \cdot m/C} = \boxed{27{,}2\ \mathrm{V}}$$

(b)
$$U = q'V = (-e)(27{,}2\ \mathrm{V}) = \boxed{-27{,}2\ \mathrm{eV}}$$

Exemplo 23-3 Energia potencial de produtos de fissão nuclear

Durante a fissão nuclear, um núcleo de urânio 235 captura um nêutron para formar um núcleo instável de urânio 236.
O núcleo instável, então, se separa em dois núcleos mais leves.



Além disso, dois ou três nêutrons são liberados. Algumas vezes os dois produtos da fissão são um núcleo de bário (carga 56*e*) e um núcleo de criptônio (carga 36*e*).
Considere que, imediatamente depois da separação, estes núcleos são cargas puntiformes positivas separadas por $r = 14{,}6 \times 10^{-15}$ m (que é a soma dos raios dos núcleos de bário e criptônio).
Calcule a energia potencial deste sistema de duas cargas em eV.

Resumindo, qual é a energia potencial de 2 cargas puntiformes de cargas $q_1 = 56e$ e $q_2 = 36e$, que estão a uma distância de $r = 14{,}6 \times 10^{-15}$ m?

Como vimos $U = q_2 \dfrac{kq_1}{r}$

então

$$U = e\frac{36 \cdot 56ke}{r}$$

$$= e\frac{36 \cdot 56 \cdot (8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})}{14{,}6 \times 10^{-15}\ \mathrm{m}}$$

$$= e(199 \times 10^6\ \mathrm{V}) = \boxed{199\ \mathrm{MeV}}$$

Potencial devido à presença de várias cargas

O potencial em um ponto devido à presença de várias cargas puntiformes é a soma dos potenciais devidos a cada uma destas cargas separadamente.
Isto é consequência do princípio da superposição do campo elétrico.
Assim, o potencial devido a um sistema de cargas puntiformes q_i é

$$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i}$$

onde a soma se estende sobre todas as cargas e r_i é a distância da *i*- ésima carga ao ponto no qual o potencial deve ser calculado.

Note que essa equação considera o ponto de referência (onde V = 0) no infinito e é válida para uma coleção de cargas puntiformes que estiverem a uma distância finita de cada uma das outras cargas.

Dica para solução de problemas

Esboce a configuração de cargas e inclua eixos coordenados convenientes.

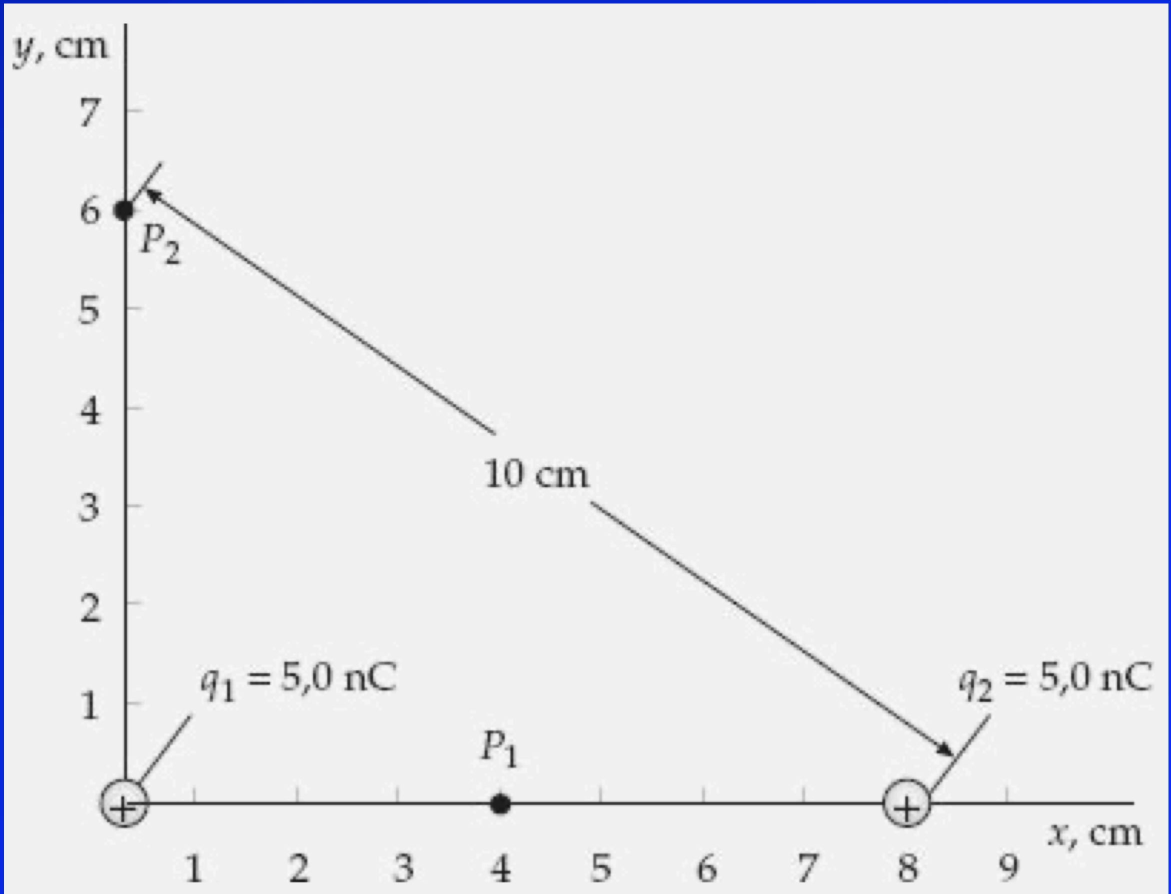
Identifique cada carga puntiforme com um símbolo distinto, tal como q_1.

Desenhe uma linha reta a partir de cada carga puntiforme q_i até o ponto P e identifique-a com um símbolo conveniente, tal como r_{iP}.

Um desenho cuidadoso pode ser muito útil para relacionar as distâncias de interesse às distâncias dadas no enunciado do problema.

Exemplo 23-4 Potencial devido a 2 cargas puntiformes

Duas cargas puntiformes de +5,0 nC estão no eixo x, uma na origem e a outra em $x = 8{,}0$ cm. Determine o potencial (a) no ponto P_1 no eixo x em $x = 4{,}0$ cm e (b) no ponto P_2 no eixo y em $y = 6{,}0$ cm. O ponto de referência (onde $V = 0$) está no infinito.



Sabemos que

$$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i} = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2}$$

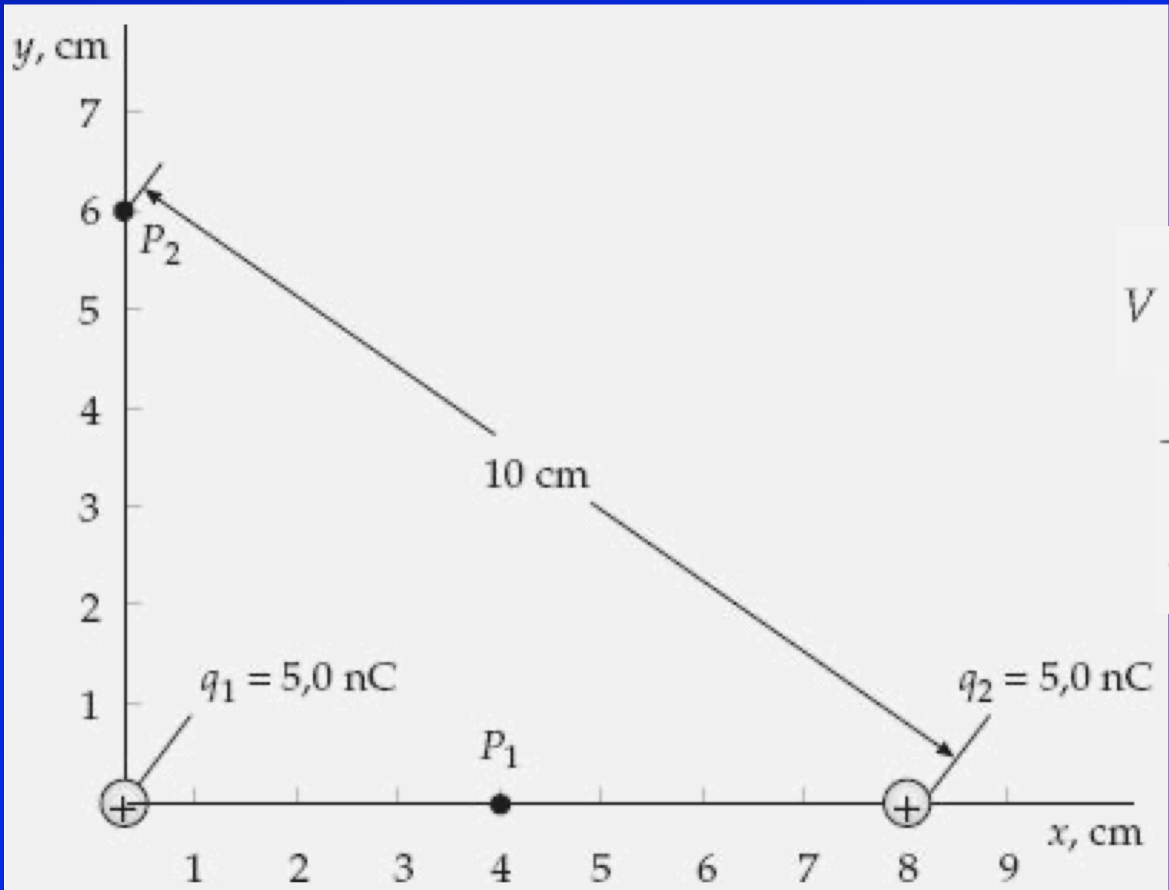
onde

r_1 é a distância entre q_1 e P e r_2 é a distância entre q_2 e P. E ainda, $q_1 = q_2 = +5$ nC.

(a) Para P_1, $r_1 = r_2 = 0{,}04$ m, assim

$$V = \frac{kq}{r} + \frac{kq}{r} = \frac{2kq}{r}$$

$$= \frac{2 \times (8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(5{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{0{,}040\ \mathrm{m}} = 2247\ \mathrm{V} = \boxed{2{,}2\ \mathrm{kV}}$$



(b) Para P_2, $r_1 = 0{,}06$ m e, aplicando Pitágoras, $r_2 = 0{,}10$ m, assim

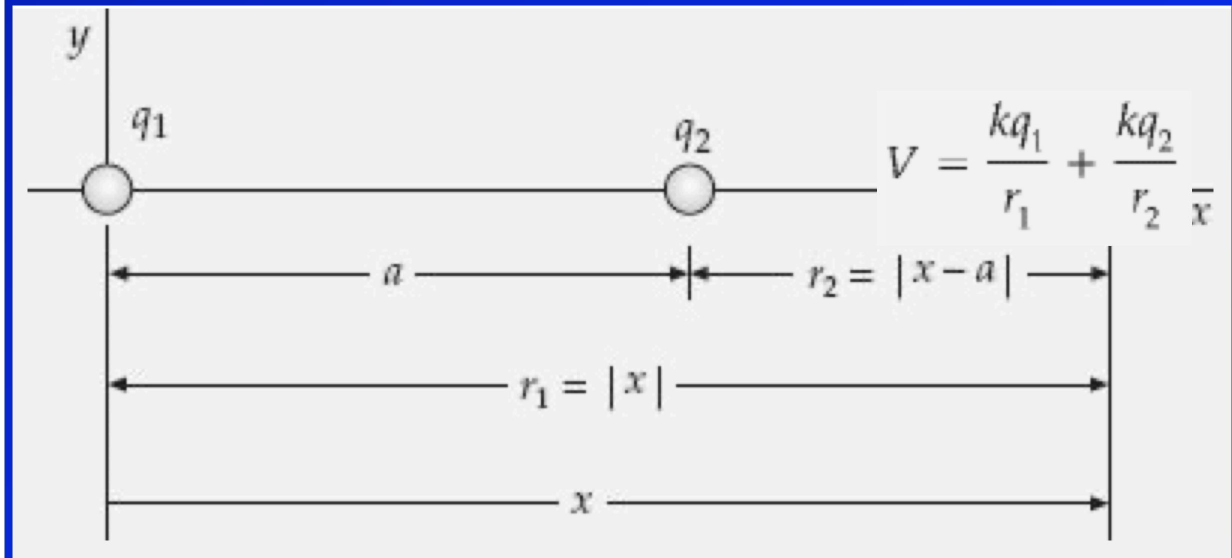
$$V = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(5{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{0{,}060\ \mathrm{m}} +$$

$$+ \frac{(8.{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(5{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{0{,}10\ \mathrm{m}}$$

$$= 749\ \mathrm{V} + 450\ \mathrm{V} = \boxed{1{,}2\ \mathrm{kV}}$$

Exemplo 23-5 Potencial ao longo do eixo x

Uma carga puntiforme q_1 está na origem e uma segunda carga puntiforme q_2 está no eixo x em $x = a$. Usando a equação $V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i}$, determine uma expressão para o potencial em qualquer ponto do eixo x como uma função de x.

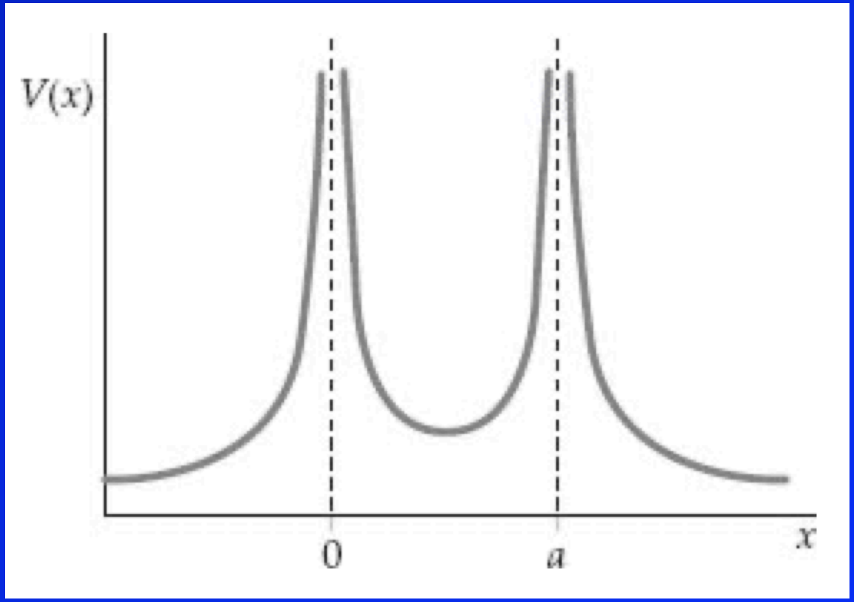


Neste caso r_1 é a distância de q_1 a um ponto P em uma posição x, assim, $r_1 = |x|$.

E, r_2 é a distância de q_2 a P, ou seja, $r_2 = |x - a|$.

Dessa forma $$V = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = \boxed{\frac{kq_1}{|x|} + \frac{kq_2}{|x - a|} \qquad x \neq 0, \quad x \neq a}$$

A figura mostra V versus x no eixo x para $q_1 = q_2 > 0$.



Note que

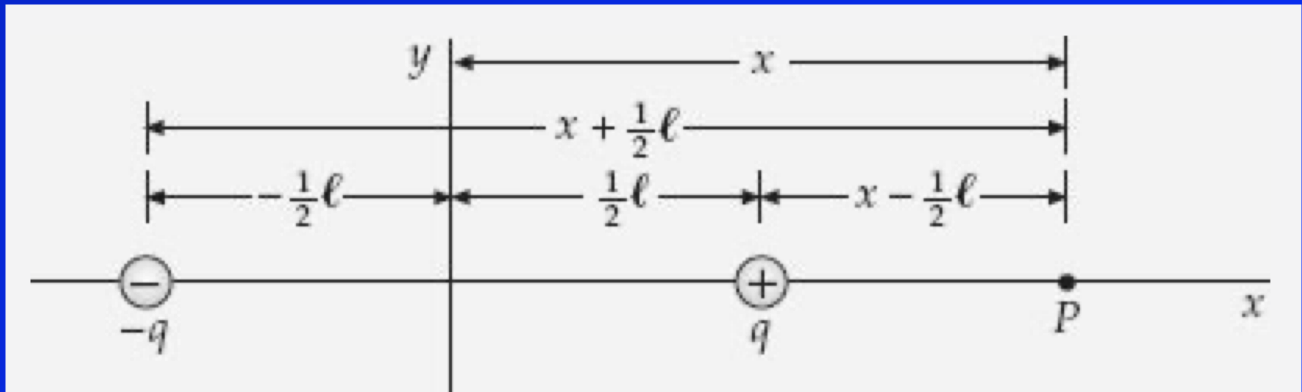
V $\rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow 0$ e quando $x \rightarrow a$ e

$V \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow +\infty$,

como deveria ser esperado.

Exemplo 23-6 Potencial devido a um dipolo elétrico

Dado um dipolo elétrico no eixo *x*, formado por uma carga puntiforme positiva $+q$ em $x = +\ell/2$ e uma carga puntiforme negativa $-q$ em $x = -\ell/2$. Determine o potencial no eixo *x* para $x >> +\ell/2$ em termos do momento de dipolo $\vec{p} = q\ell\hat{\imath}$.



Para $x > \ell/2$, a distância do ponto *P* à carga positiva é $(x - \ell/2)$ e a distância do ponto *P* à carga negativa é $(x + \ell/2)$.

Assim, para $x > \ell/2$

$$V = \frac{kq}{x - (\ell/2)} + \frac{k(-q)}{x + (\ell/2)} = \frac{kq\ell}{x^2 - (\ell^2/4)}$$

Repetindo a última equação, para $x > \ell/2$

$$V = \frac{kq}{x - (\ell/2)} + \frac{k(-q)}{x + (\ell/2)} = \frac{kq\ell}{x^2 - (\ell^2/4)}$$

e sabendo que o módulo de $\vec{p}$ é $p = q\ell$, temos $V = \dfrac{kp}{x^2 - \left(\ell^2/_4\right)}$

E, para $x \gg +\ell/2$, teremos

$$V \approx \frac{kp}{x^2}$$

Note que, para uma carga puntiforme, $V = \dfrac{kq}{r}$ **e, portanto, o potencial de um dipolo elétrico cai mais rapidamente que o de uma carga puntiforme.**

Vimos também que o campo elétrico de um dipolo cai com o cubo da distância, enquanto que para uma carga puntiforme cai com o quadrado da distância, o que é coerente que o potencial do dipolo deve cair mais rapidamente que o de uma carga puntiforme.

23-3 Calculando o campo elétrico a partir do potencial

Lembrando que o potencial elétrico *V* é um escalar e o campo elétrico $\vec{E}$ é um vetor, precisamos obter um campo vetorial a partir de um campo escalar.

Por definição de variação de potencial, temos $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$. Considerando $d\vec{\ell} = (dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k})$, então

$$dV = -\vec{E}\cdot\left(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}\right) = -\left(\vec{E}\cdot dx\hat{\imath} + \vec{E}\cdot dy\hat{\jmath} + \vec{E}\cdot dz\hat{k}\right) =$$
$$= -\left(E_x dx + E_y dy + E_z dz\right)$$

Assim,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \ \text{ e } E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}\ .$$

Nessas equações, as derivadas são *derivadas parciais*, o que significa que, na operação $\frac{\partial V}{\partial x}$ toma-se a derivada em relação a *x*, mantendo-se *y* e *z* constantes.

$\vec{E}$ **sendo dado por**

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \text{ e } E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

em notação vetorial, se escreve que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)V$$

onde $\vec{\nabla}$ **é o operador gradiente.**

Assim, o campo elétrico é o negativo do gradiente do potencial *V*. Isto é, a direção e o sentido do campo elétrico acompanham a máxima taxa de decréscimo da função potencial com relação à distância.

Para uma distribuição esfericamente simétrica de carga centrada na origem, o potencial será uma função apenas da coordenada radial *r*.

Deslocamentos perpendiculares à direção radial não provocam variação em *V*(*r*) e, portanto, o campo elétrico deverá ser radial.

Um deslocamento na direção radial é escrito como $d\vec{\ell} = dr\,\hat{r}$.

Então $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\vec{E}\cdot dr\,\hat{r} = -E_r\,dr$

e assim

$$E_r = -\frac{dV(r)}{dr}$$

Observe que não podemos calcular $\vec{E}$ se conhecermos o potencial *V* em apenas um único ponto, precisamos conhecer *V* sobre uma região do espaço para calcular a derivada necessária para obter $\vec{E}$ naquela região.

Exemplo 23-7 $\vec{E}$ para um potencial que varia com x

Determine o campo elétrico para uma função potencial elétrico V dado por $V = 100\ \text{V} - (25\ \text{V/m})\, x$.

Esta função potencial depende apenas de x.

$$V(x) = 100 - 25\, x$$

(V dado em V e x dado em m)

Como o potencial não varia com y ou z , $E_y = E_z = 0$.

Assim $\vec{E} = E_x\, \hat{\imath}$ onde $E_x = -\, dV/dx$.

Portanto

$$\vec{E} = +(25\ \text{V/m})\, \hat{\imath}$$