

DIP implica DFU

O objetivo dessas notas é provar o seguinte teorema:

Teorema: Seja D um domínio de ideais principais (DIP). Então D é um domínio de fatoração única (DFU).

Mas antes de prová-lo vamos rever algumas definições e provar dois lemas auxiliares.

Definição A: [Garcia, Lequain, II.2, pág. 45] Seja A um anel.

- (i) Uma cadeia ascendente de ideais de A é uma família de ideais $\{I_j\}$ de A tais que

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots$$

- (ii) A cadeia acima é *estacionária* se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $I_k = I_N$ para $k \geq N$.

Lema 1: Seja D um DIP. Então toda cadeia ascendente de ideais de D é estacionária.

Prova: Seja

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots$$

uma cadeia ascendente de ideais de D . Como a cadeia é encaixante sua união $\cup_1^\infty I_j$ é um ideal de D . Como D é DIP, $\cup_1^\infty I_j = (a)$ para algum $a \in D$. Assim $a \in \cup_1^\infty I_j$ e portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a \in I_N$. Assim, se $k \geq N$, então

$$I_k \subseteq \cup_1^\infty I_j = (a) \subseteq I_N \subseteq I_k.$$

Logo $I_k = I_N$, se $k \geq N$.

Exemplo: Você deve estar tentando achar um domínio D que admite uma cadeia que não estaciona. Bem, isso não é fácil pois a propriedade de toda cadeia ascendente estacionar é equivalente à propriedade de todo ideal de D ser finitamente gerado, isto é, D ser noetheriano (Veja Garcia, Lequain Teorema II.2.1, ítem (a), pág 45).

Então temos que considerar um domínio não noetheriano. O mais fácil e mais conhecido é $D = K[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$, o anel de polinômios sobre um corpo em um número infinito de variáveis. (Você conhece esse anel? Como é um elemento desse anel?).

Nesse anel existe a seguinte cadeia de ideias que não estaciona (prove isto!):

$$(X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq (X_1, X_2, X_3) \subsetneq \cdots$$

.

Lema 2: Seja D um DIP e $a \in D$ não nulo e não invertível. Então existe $p \in D$ irreduzível tal que $p|a$.

Prova: (Seguindo Garcia, Lequain, pág. 46, Afirmação). Se o próprio a é irreduzível, podemos tomar $p = a$. Se a é redutível, então $a = a_1 b_1$ com ambos a_1 e b_1 não invertíveis. Se a_1 é irreduzível, podemos tomar $p = a_1$ e então $p|a$. Se a_1 é redutível, então $a_1 = a_2 b_2$ com ambos não invertíveis. Se a_2 é irreduzível, então podemos tomar $p = a_2$ já que

$$a = a_1 b_1 = a_2 b_2 b_1$$

e portanto $a_2|a$.

Afirmamos que o processo acima tem que acabar, isto é, para algum $n \in \mathbb{N}$, $a_{n-1} = a_n b_n$ com a_n irreduzível. De fato, primeiramente note que se $a = bc$ é uma fatoração não trivial de a , isto é, b e c são não invertíveis, então $(a) \subsetneq (b)$. (Prove isto! Aqui você vai ter que usar que D é um domínio para mostrar que a inclusão é estrita). Assim, teríamos uma cadeia ascendente não-estacionária de ideais de D

$$(a) \subsetneq (a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (a_{n-1}) \subsetneq (a_n) \subsetneq \cdots$$

o que contradiz o Lema 1.

Prova do teorema: Por Garcia, Lequain Proposição II.1.8, temos que mostrar que as condições (i) da página 43 (existência da fatoração) e (ii') também da pág. 43 (todo irreduzível é primo) são satisfeitas. Começamos com a condição (i).

Seja $a \in D$ não nulo e não invertível. Pelo lema 2, existe $p_1 \in D$ irreduzível tal que $p_1|a$, isto é, $a = p_1 q_1$. Se q_1 é invertível acabou pois nesse caso a é irreduzível (a é associado a p_1 que é irreduzível) e ele é a sua própria fatoração. Se q_1 não é invertível, então pelo lema 2 de novo temos que $q_1 = p_2 q_2$ com p_2 irreduzível. Se q_2 é invertível acabou pois $a = p_1 p_2 q_2$ é uma fatoração de a . Se q_2 não é invertível, pelo

lema 2, $q_2 = p_3 q_3$ com p_3 irredutível. Se q_3 é invertível acabou pois $a = p_1 p_2 p_3 q_3$ é uma fatoração de a . Afirmamos que esse processo tem que acabar. De fato, caso contrário, teríamos uma cadeia ascendente de ideais de D não-estacionária,

$$(a) \subsetneq (q_1) \subsetneq (q_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (q_{n-1}) \subsetneq (q_n) \subsetneq \cdots$$

o que contradiz o Lema 1. Isso conclui a prova da condição (i) de DFU.

Agora provaremos a condição (ii'). Seja $p \in D$ irredutível tal que $p|ab$. Se $p|a$ acabou. Se não, vamos calcular o $\text{MDC}\{a, p\}$. Afirmamos que $\text{MDC}\{a, p\} = 1$. De fato, como p é irredutível seus divisores são apenas os associados a p . Mas como estamos supondo que p não divide a , então $\text{MDC}\{a, p\} = 1$. Como D é um DIP, o MDC se escreve como combinação linear e portanto existem $c, d \in D$ tais que

$$1 = ac + pd.$$

Multiplicando essa equação por b obtemos

$$b = abc + pbd.$$

Como $p|ab$ e $p|p$ (claro!) então $p|b$, como queríamos.

Observação: Com esse teorema temos a seguinte hierarquia de domínios:

D Euclidiano $\implies$ D DIP $\implies$ D DFU. Ou seja,

$$\{D \text{ Euclidiano}\} \subset \{D \text{ DIP}\} \subset \{D \text{ DFU}\}.$$

Veremos durante o curso que essas inclusões são estritas.