

2020-2, "FISMAT-AV", AULA 18

OBJETIVOS: FINALIZAR O TEMA "DISTRIBUIÇÕES NO $\mathbb{R}^n$ " E "PREPARAR O TERRENO" PARA TRANSFORMADAS DE FOURIER DISCUTINDO DISTRIBUIÇÕES TEMPERADAS E SÉRIES DE FOURIER.

(CONT.) 2.7 DISTRIBUIÇÕES NO $\mathbb{R}^n$

→ DERIVADAS PARCIAIS E LACIANDO

EM COMPLETA ANALOGIA COM A DEFINIÇÃO DE DERIVADA DE UMA DISTRIBUIÇÃO $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\langle T', h \rangle \equiv -\langle T, h' \rangle,$$

DEFINE-SE, $\forall h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x^i}, h \right\rangle \equiv - \left\langle T, \frac{\partial h}{\partial x^i} \right\rangle.$$

DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR SÃO OBTIDAS PELA SUCESSIVA APLICAÇÃO DESTA REGRA. EM PARTICULAR,

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x^{i2}}, h \right\rangle = (-1)^2 \left\langle T, \frac{\partial^2 h}{\partial x^{i2}} \right\rangle$$

E, ESCRREVENDO "SIMBOLICAMENTE" O LAPLACIANO COMO

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}},$$

O LAPLACIANO DE UMA DISTRIBUIÇÃO É A DISTRIBUIÇÃO DEFINIDA COMO

$$\boxed{\langle \Delta T, h \rangle \equiv \langle T, \Delta h \rangle}.$$

AS FUNÇÕES $\phi(r) = \log r$ E $\phi(r) = \frac{1}{r^{n-2}}$ ↗ $n=2$ ↗ $n>2$

ONDE $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$, SÃO SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE LAPLACE $\Delta \phi = 0$ E SÃO LOCALMENTE INTEGRÁVEIS, APESAR DE $r \neq 0$. 02

É NATURAL PERGUNTARMOS: QUAIS SÃO
OS LAPLACIANOS DESSAS FUNÇÕES,
VISTAS COMO DISTRIBUIÇÕES?

CÁLCULOS LONGOS E TÉCNICOS LEVAM
A (LEMOS, p. 269-273; APPEL, p. 204-
208)

$$\langle \Delta \log r, h \rangle = \dots = \langle 2\pi \delta, h \rangle$$

E

$$\left\langle \Delta \frac{1}{r^{n-2}}, h \right\rangle = \dots = \left\langle -(n-2) S_n \delta, h \right\rangle,$$

ONDE $S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ É A ÁREA DA

ESFERA UNITÁRIA EM n DIMENSÕES

E $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$

É A FUNÇÃO GAMA.

2.8 DISTRIBUIÇÕES TEMPERADAS

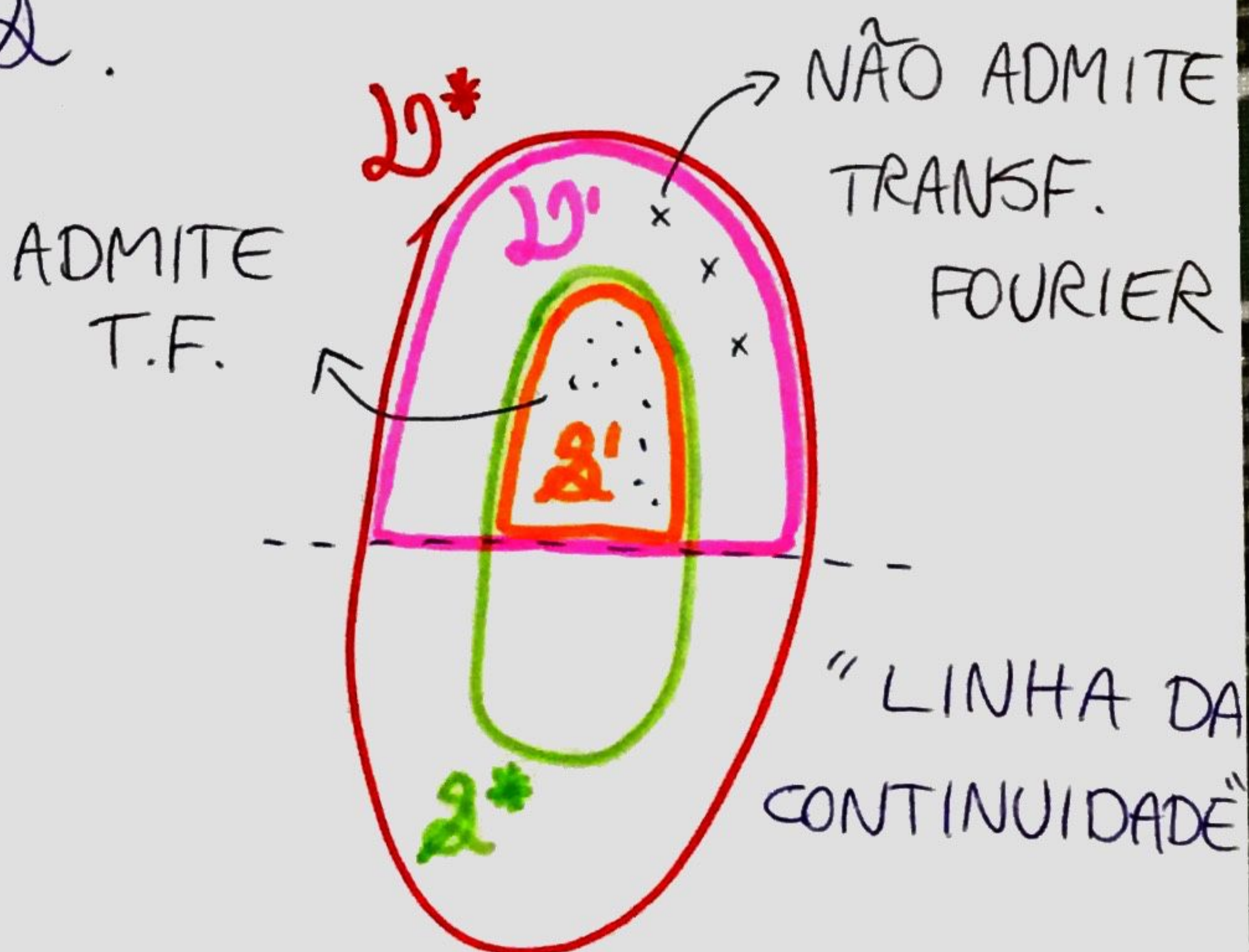
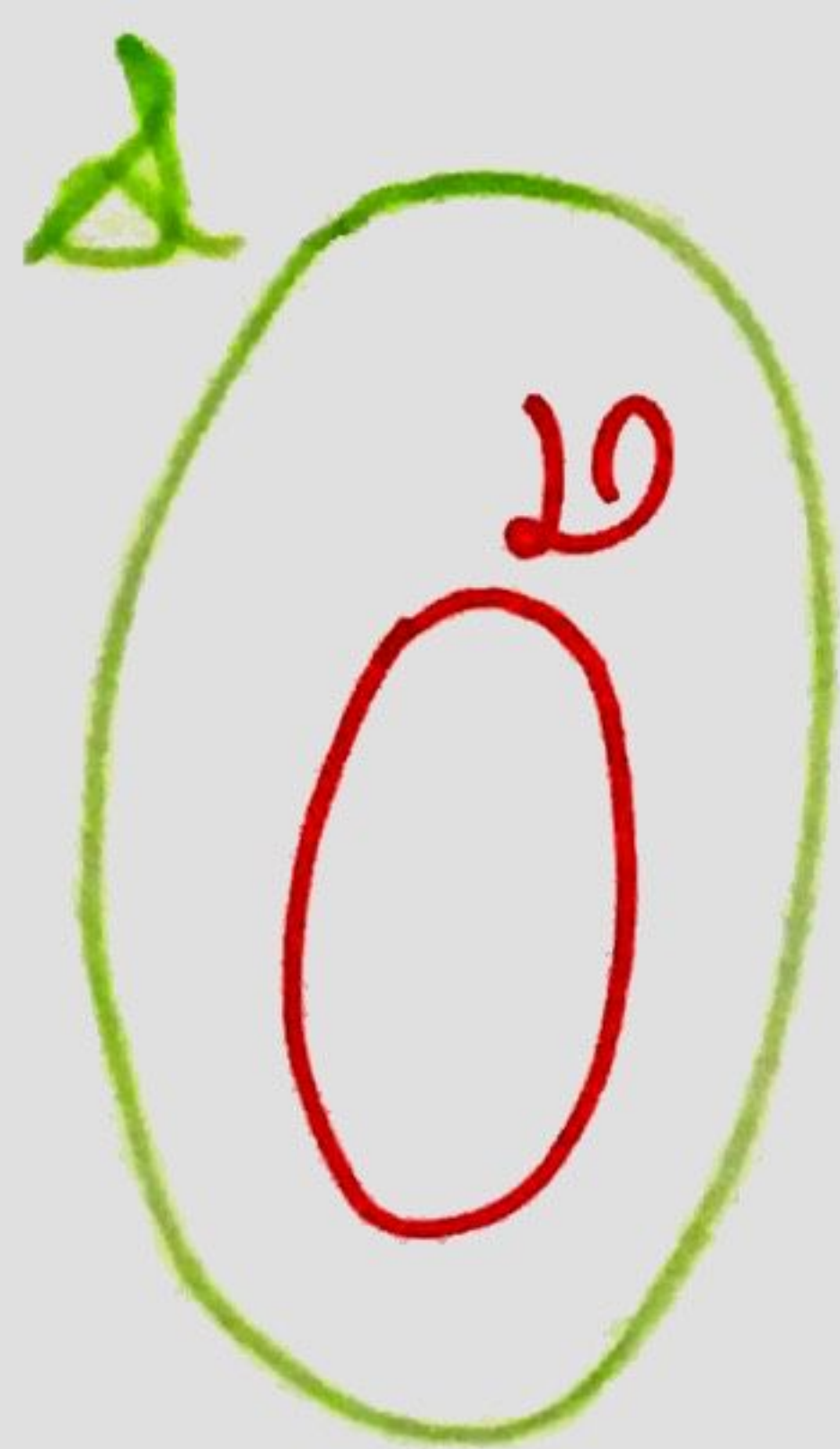
QUANDO ESTUDARMOS TRANSFORMADAS DE FOURIER DE FUNÇÕES E QUI-
SERMOS ESTENDÊ-LAS A DISTRIBUI-
ÇÕES, VEREMOS QUE ISSO NÃO SERÁ
POSSÍVEL/CONSISTENTE PARA QUAL-
QUER $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. É CONVENIENTE
REDUZIR $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, PARA ELIMINAR OS
CASOS PROBLEMÁTICOS, E ISSO É
POSSÍVEL MEDIANTE UMA EXPANSÃO
DO ESPAÇO TESTE $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. LEMBRA DA
FALTA DE ISOMORFISMO ENTRE V E V^*
QUANDO A DIMENSÃO É INFINITA?

O ESPAÇO $\mathcal{S}$ DE SCHWARTZ É
CONSTITUÍDO PELAS FUNÇÕES $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
DE CLASSE C^∞ QUE SÃO DE DECRÉSCI-
MO RÁPIDO: ELAS E SUAS DERIVA-

DAS DECAEM MAIS RAPIDAMENTE DO
QUE QUALQUER POTÊNCIA DE $1/|x|$
QUANDO $|x| \rightarrow \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} |x^k \cdot \varphi^{(m)}(x)| = 0, \forall k, m \in \mathbb{Z}^+.$$

AS DISTRIBUIÇÕES TEMPERADAS
SÃO OS ELEMENTOS DE $\mathcal{D}'$, O ESPAÇO
DUAL TOPOLÓGICO DE $\mathcal{D}$, FUNCIONAIS
LINEARES CONTÍNUOS SOBRE OS ELE-
MENTOS DE $\mathcal{D}$.



3. TRANSFORMADA DE FOURIER

3.1 MOTIVAÇÃO, SÉRIES DE FOURIER

SOB CONDIÇÕES AMENAS (COMO $\int_0^{2L} |f(x)|^2 dx < \infty$, POR EXEMPLO), UMA FUNÇÃO $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ DE PERÍODO $2L$ ADMITTE A SÉRIE DE FOURIER

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(K_n \cdot x) + b_n \cdot \sin(K_n \cdot x)],$$

ONDE $K_n \equiv \frac{n\pi}{L}$ E MOSTRA-SE QUE

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos(K_n x) dx$$

E

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin(K_n x) dx.$$

UM POUCO MENOS CONHECIDA É
A FORMA COMPLEXA

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot e^{+iK_n x}$$

ONDE

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(x) e^{-iK_n x} dx$$

ESTAS EXPRESSÕES, EM UM "LIMITE
DO CONTÍNUO" $K_n \rightarrow K$, COM $K_n = n \Delta K$,
 $n \rightarrow \infty$ E $\Delta K \equiv \frac{\pi}{L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$, MOTIVARÃO A
DEFINIÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOU-
RIER PARA FUNÇÕES NÃO PERIÓDICAS

$$(L \rightarrow \infty). \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad n \geq 1: \quad c_{-n} = c_n^* \\ c_n = \frac{a_n - i b_n}{2} \end{array} \right.$$

$$\cos K_n x = \frac{e^{+iK_n x} + e^{-iK_n x}}{2};$$

$$\sin K_n x = \frac{e^{+iK_n x} - e^{-iK_n x}}{2i}$$