FUNÇÕES

I. Definições básicas:

1. Uma relação binária $F \subset A \times B$ é uma *função* de A em B se

(a) $Dom F = A$ e

(b) aFb_1 e aFb_2 implicam $b_1 = b_2$, para todo $a \in A$ e $b_1, b_2 \in B$.

Notação: $F : A \longrightarrow B$.

Obs: Uma relação binária F satisfazendo (b) sempre será uma função se considerarmos $A = Dom F$.

2. Se $F : A \longrightarrow B$ é uma função e $a \in A$ e $b \in B$ são tais que aFb , então dizemos que b é o *valor de F em a* e escrevemos $b = F(a)$.

3. Se $f : A \longrightarrow B$ é uma função, definimos:

(a) f é *sobrejetora* se $Im f = B$;

(b) f é *injetora* se $f(a) = f(b)$ implica $a = b$ para quaisquer $a, b \in A$;

(c) se $C \subset A$, a *restrição* de f a C é a função $f \upharpoonright C = \{(x, y) \in f : x \in C\}$.

4. Uma função f é dita *inversível* se f^{-1} é uma função.

5. Duas funções f e g são ditas *compatíveis* se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in Dom f \cap Dom g$.

II. Exercícios (propriedades básicas e exemplos):

1. Seja $F = \{(x, \frac{1}{x^4}) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Mostre que F é uma função de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ em $\mathbb{R}$ e ache $F[C]$ e $F^{-1}[C]$ onde $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$.

2. Se f e g são duas funções, o que significa dizer que $f = g$?

3. Se f e g são funções mostre que $g \circ f$ também é uma função, com $Dom(g \circ f) = Dom f \cap f^{-1}[Dom g]$, e que $g \circ f = \{(x, z) : g(f(x)) = z\}$. Observe que $Dom(g \circ f) = Dom f$ se e somente se $Im f \subset Dom g$.

4. Suponha $f : A \longrightarrow B$. Sejam C, C_1 e C_2 subconjuntos de A e D um subconjunto de B . Mostre que valem as seguintes afirmações:

(a) se f é injetora, então $f^{-1}[f[C]] = C$;

(b) se f é sobrejetora, então $f[f^{-1}[D]] = D$;

(c) se f é injetora, então $f[C_1 \cap C_2] = f[C_1] \cap f[C_2]$.

Dê exemplos que mostrem que a igualdade não valem em geral (ou seja para qualquer função f). Quais inclusões valem em geral?

5. Suponha $f : A \longrightarrow B$ e $C \subset A$.

(a) Vale que $f[A \setminus C] = f[A] \setminus f[C]$?

(b) Caso tenha concluído que a afirmação é falsa, verifique qual inclusão vale e tente achar condições sobre f para que se tenha a igualdade.

6. Mostre que uma função f é inversível se e somente se é injetora e sobrejetora. Além disso, mostre que se f é inversível, então f^{-1} também é inversível e $(f^{-1})^{-1} = f$.

7. Mostre que se duas funções f e g são compatíveis, então $f \cup g$ é uma função com o domínio $Dom f \cup Dom g$.