MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

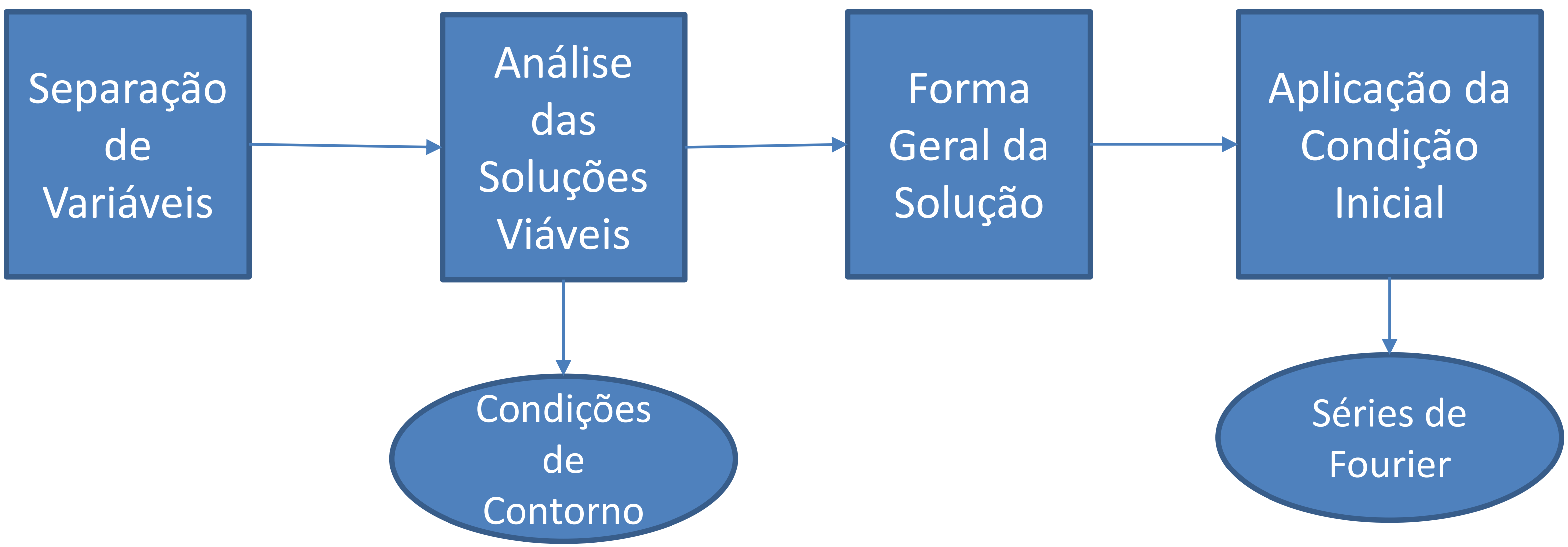
Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

Exercícios

1.3. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira usando o método de separação de variáveis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \end{cases}$$



1.3. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + 2X'(x)T(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira $X(0) = X(L) = 0$ que decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ e $0 = u(L,t) = X(L)T(t)$:

$$\begin{cases} X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \; X(L) = 0 & (3.13) \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 & (3.14) \end{cases}$$

A equação $X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > -1$ **:** $X(x) = c_1 e^{(-1+\sqrt{1+\lambda})x} + c_2 e^{(-1-\sqrt{1+\lambda})x}$.
Se $\lambda = -1$ **:** $X(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$.
Se $\lambda < -1$ **:** $X(x) = c_1 e^{-x} \operatorname{sen}(\sqrt{-1-\lambda}\, x) + c_2 e^{-x} \cos(\sqrt{-1-\lambda}\, x))$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que (3.13) tem solução não identicamente nula somente se$\lambda < -1$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -1 - \frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valores de fronteira (3.13) tem solução

$$X(x) = c_1 e^{-x} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},\ \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -1 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação diferencial (3.14) obtemos

$$T'(t) + (1 + \frac{n^2\pi^2}{L^2})T(t) = 0$$

que tem solução

$$T(t) = c_2 e^{-t} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} t},\ \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções fundamentais

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = e^{-x-t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-x-t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

Vamos considerar as séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-x-t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)e^x$. Assim, se a função $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)e^x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

A solução desse problema requer a solução de integrais desse tipo.

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

Problema Homogêneo
C.C. de Neumann
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

MAP2320

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução
(Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

3.2 Barra Isolada nas Extremidades

Vamos determinar a temperatura em função da posição e do tempo, $u(x,t)$ em uma barra isolada dos lados, de comprimento L, sendo conhecidos a distribuição de temperatura inicial, $f(x)$, e sabendo que as extremidades são mantidas também isoladas, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Calculando-se as derivadas parciais temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t).$$

Dividindo-se por $\alpha^2 X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \; X'(L) = 0 & (3.6) \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 & (3.7) \end{cases}$$

As condições $X'(0) = X'(L) = 0$ decorrem do fato de que a barra está isolada nas extremidades, ou seja,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t).$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda} x)$.

As condições de fronteira $X'(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que

Se $\lambda > 0$ **:**

Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{\lambda}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x})$, obtemos que $0 = c_1 - c_2$, ou seja, $c_2 = c_1$. Logo

$$X(x) = c_1(e^{\sqrt{\lambda}\,x} + e^{-\sqrt{\lambda}\,x}).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ obtemos $\sqrt{\lambda}c_1(e^{\sqrt{\lambda}\,L} - e^{-\sqrt{\lambda}\,L})$. Logo, se $c_1 \neq 0$, então

$$e^{\sqrt{\lambda}\,L} = -e^{-\sqrt{\lambda}\,L}$$

o que não é possível se $\lambda > 0$.

Se $\lambda = 0$ **:**

Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X'(x) = c_2$, obtemos que $c_2 = 0$. Logo

$$X(x) = c_1.$$

Se $\lambda < 0$:

Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda}(c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) - c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x)),$$

obtemos que $c_1 = 0$. Logo

$$X(x) = c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x). \tag{3.8}$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x),$$

obtemos

$$c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0.$$

Logo, se $c_2 \neq 0$, então $\sqrt{-\lambda}L = n\pi$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Logo

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Portanto o problema de valores de fronteira (3.6) tem solução não nula somente se

$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se estes valores de λ em (3.8) vemos que o problema de valores de fronteira (3.6) tem soluções fundamentais

$$X_0 = 1 \quad \text{e} \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L},\ \text{para}\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n = 0$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação diferencial (3.7) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0$$

que tem como solução fundamental

$$T_n(t) = c_2 e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

tem soluções fundamentais

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Combinações lineares das soluções fundamentais são também solução (verifique!),

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Mas uma solução deste tipo não necessariamente satisfaz a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, para uma função $f(x)$ mais geral. Vamos supor que a solução do problema de valor inicial e de fronteira seja uma série da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t}. \tag{3.9}$$

Para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $f(x)$. Assim, pelo Corolário 2.4 na página 181, se a função $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx,\ c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ n = 1,2,3\ldots \tag{3.10}$$

Exemplo 3.3. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$ e as extremidades também isoladas, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0$$

e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < 40 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de cossenos de $f(x)$, ou seja,

a_n (erro de digitação)

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{40}\int_0^{40} f(x)dx = 10,\\
c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\cos\frac{n\pi x}{40}dx\\
&= 2\left(b_n(f^{(1)}_{0,1/2}, 40) + 40\, b_n(f^{(0)}_{1/2,1}, 40) - b_n(f^{(1)}_{1/2,1}, 40)\right)\\
&= \frac{80}{n^2\pi^2}(s\,\mathrm{sen}\, s + \cos s)\Big|_0^{n\pi/2} + \frac{80}{n\pi}\mathrm{sen}\, s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{80}{n^2\pi^2}(s\,\mathrm{sen}\, s + \cos s)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi}\\
&= \frac{160}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{80}{n^2\pi^2} - \frac{80}{n^2\pi^2}\cos n\pi\\
&= 80\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2\pi^2},\; n = 1, 2, 3\ldots
\end{aligned}$$

Entretanto alguns termos são nulos:

$$c_{2k+1} = 0$$

$$c_{2k} = 80\frac{2\cos k\pi - 2}{(2k)^2\pi^2} = 40\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}$$

e

$$c_{2\cdot 2l} = 0$$

$$c_{2(2l+1)} = 40\frac{-2}{(2l+1)^2\pi^2} = -\frac{80}{(2l+1)^2\pi^2}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 10 + \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\ &= 10 + \frac{40}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{20}e^{-\frac{n^2\pi^2}{400}t} \\ &= 10 - \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{20}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{400}t} \end{aligned}$$

Observe que a solução tende a $v(x,t) = 10$, quando t tende a mais infinito, que é a solução estacionária.

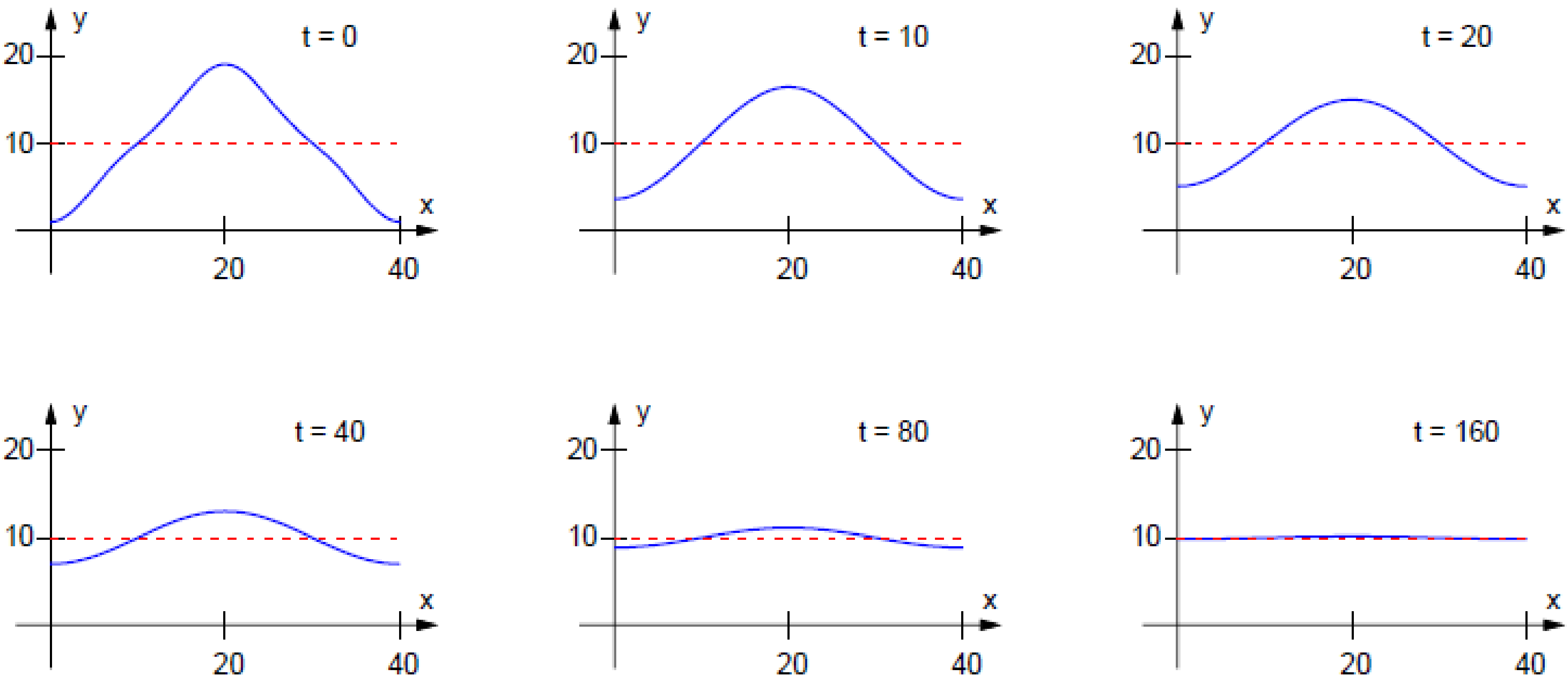


Figura 3.3 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 3.3 tomando apenas 3 termos não nulos da série.

Exercícios (respostas na página 321)

2.1. Considere uma barra com 40 cm de comprimento , $\alpha = 1$, isolada dos lados e que está inicialmente a temperatura dada por $u(x, 0) = 3x/2$, $0 \leq x \leq 40$ e que as extremidades estão isoladas.

(a) Determine $u(x, t)$.

(b) Qual a temperatura estacionária?

Use seu script python para visualização a solução em instantes sucessivos.

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

Problema Homogêneo
C.C. de Neumann
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Mistas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Problema Não-Homogêneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

INFORMAÇÕES GERAIS

Devido a impossibilidade de atividades presenciais a avaliação do curso será composta por 3 trabalhos que combinarão a parte teórica e a implementação computacional.

A linguagem de programação dos trabalhos será Python.

As datas de entrega serão definidas oportunamente.

O critério de aprovação é a média aritmética dos trabalhos, todos com peso igual.

Os enunciados dos trabalhos serão entregues nos dias:

T1 - 21/10

T2 - 18/11

T3 - 14/12

Precisamos decidir como vocês preferem que seja marcada a entrega.

Datas distintas para cada trabalho – com correção subsequente

Data final para todos – com correção apenas após todos os prazos de entrega

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- **Equação do calor transiente (parabólica)**
- Equação de Poisson (elíptica)
- Equação da onda (hiperbólica)