MAT0315 - Introdução à Análise - 2020

Gabarito dos Exercícios da Semana do dia 14.09.20 - Lista 1

Ao estudar, é importante que você saiba o por quê de cada passagem. Em particular, certifique-se que você sabe justificar cada uma das passagens assinaladas com *:

Exercício 1(a)(ii) Dê a representação decimal infinita e periódica do número $\frac{1}{21}$, destacando a parte periódica.

Solução. Quando fazemos a divisão de 1 por 21, obtemos a sequência de restos:

$$10, 16, 13, 4, 19, 1, 10, 16, 13, 4, \ldots$$

Ou seja, a partir do momento em que chegamos no resto 10, repetimos o mesmo processo de dividir 10 por 21. Então a parte periódica do número são os quocientes que correspondem, respectivamente, a $10, 16, 13, 4, 19, 1$ na divisão, ou seja, é $\overline{047619}$. Portanto, temos que

$$\frac{1}{21} = 0{,}\overline{047619}$$

Exercício 1(b)(iii) Obtenha o número racional $\frac{p}{q}$ cuja representação na forma decimal é $0{,}12\overline{1267}$.

Solução. Seja $x = 0{,}12\overline{1267}$. A ideia é multiplicar x por potências de 10 oportunas de forma a "cortar" a parte periódica. De fato, temos que:

$$\begin{cases} 10^2 x &= 12{,}\overline{1267} \\ 10^6 x &= 121267{,}\overline{1267} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (10^6 - 10^2)x = 121267{,}\overline{1267} - 12{,}\overline{1267} = 121255$$

$$\Rightarrow x = \frac{121255}{1000000 - 100} = \frac{121255}{999900}$$

Exercício 4(a) Se p é um número primo qualquer então não existe número racional r tal que $r^2 = p$.

Solução 1. Suponha, por absurdo, que exista $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = p$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a, b \in \mathbb{N}$, ou seja, que $r > 0$. Temos:

$$r^2 = p \iff \left(\frac{a}{b}\right)^2 = p \iff a^2 = pb^2$$

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, os números a e b podem ser escritos, de modo único a menos da ordem, como produto de primos, digamos $a = a_1\, a_2\, \cdots\, a_m$ e $b = b_1\, b_2\, \cdots\, b_n$, sendo cada a_i e cada b_j um número primo.

Substituindo na igualdade anterior, obtemos $(a_1\,a_2\,\cdots\,a_m)^2 = p\,(b_1\,b_2\,\cdots\,b_n)^2$, ou seja,

$$a_1^2\,a_2^2\,\cdots\,a_m^2 = p\,b_1^2\,b_2^2\,\cdots\,b_n^2$$

Essa igualdade é impossível pois o número escrito à esquerda é um produto de primos em que a quantidade fatores iguais a p ou é 0 ou é par (caso alguns dos a_i sejam iguais a p). Entretanto, no lado direito, a quantidade de fatores iguais a p é ímpar. A unicidade da fatoração garantida pelo Teorema Fundamental da Aritmética, garante que não pode existir um número com duas fatorações em primos distintas.

Sendo assim, concluímos que não existe r racional tal que $r^2 = p$.

□

Solução 2. Se m e n são inteiros, denotamos $m|n$ se m divide n, isto é, m é um divisor de n. Com isso em mãos, suponha, **por absurdo** , que existe um racional r tal que $r^2 = p$. Escrevemos r como uma fração irredutível, isto é $r = \frac{a}{b}$ com $\operatorname{mdc}(a,b) = 1$ (podemos fazer isso porque, dada qualquer fração, obtemos uma fração irredutível ao dividir o numerador e o denominador por seu mdc).

Temos então que $(\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2} = p$, donde sai que:

$$a^2 = pb^2 \tag{1}$$

De (1) temos que $p|a^2$. Como p é primo, segue que $p|a$ *, então podemos escrever $a = pk$ para algum k inteiro. Substituindo em (1), obtemos:

$$\begin{aligned} &pb^2 = (pk)^2 = p^2k^2 \\ &\Rightarrow b^2 = pk^2, \end{aligned} \tag{2}$$

donde segue que $p|b^2$. Do mesmo argumento acima, concluimos que $p|b$, e escrevemos $b = pq$ para algum q inteiro. Logo, temos que p é um primo que divide tanto a quanto b. Mas $\operatorname{mdc}(a,b) = 1$ por hipótese! Chegamos num absurdo. Portanto, não pode existir um racional r tal que $r^2 = p$.

□

Exercício 5(b) Prove que não existe um número racional r tal que $r^3 = 2$.

Solução 1. A demonstração a seguir é análoga à solução 1 apresentada no exercício anterior.

Suponhamos, por absurdo, que exista $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^3 = 2$. Vamos supor $r = \frac{a}{b}$ tais que $a, b \in \mathbb{N}$. Assim, $r^3 = 2 \iff a^3 = 2b^3$. Sejam $a = a_1\,a_2\,\cdots\,a_m$ e $b = b_1\,b_2\,\cdots\,b_n$ as decomposições de a e b em fatores primos.

Substituindo em $a^3 = 2b^3$, obteremos

$$a_1^3\,a_2^3\,\cdots\,a_m^3 = 2\,b_1^3\,b_2^3\,\cdots\,b_n^3$$

O número acima apresenta duas decomposições em fatores primos distintas. De fato, a quantidade de fatores primos iguais a 2, no lado esquerdo ou é 0 ou é um múltiplo de 3, caso alguns dos primos a_i for igual a 2. No lado direito da igualdade, a quantidade de fatores iguais a 2 é 1, ou 4, ou 7, etc. (é da forma $3K+1$ para algum natural K). Isso contradiz a unicidade da decomposição em fatores primos garantida pelo Teorema Fundamental da Aritmética.

□

Solução 2. Vamos usar argumentos muito semelhantes aos da solução 2 do exercício 4(a), observando o fato de que 2 é primo. Suponhamos novamente que $r = \frac{a}{b}$ com $\operatorname{mdc}(a,b) = 1$. Temos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2 \Rightarrow a^3 = 2b^3$$

Daí temos que $2|a^3$, e como 2 é primo, $2|a$ *. Escrevemos $a = 2k$, e, substituindo:

$$2^3k^3 = 2b^3$$
$$\Rightarrow b^3 = 4k^3$$

Como $2|4$ e $4|b^3$, vale que $2|b^3$. 2 é primo, então $2|b$, e novamente chegamos ao absurdo de que existe um primo que divide tanto a quanto b, contradizendo $\operatorname{mdc}(a,b) = 1$.

□

Exercício 6(b) Prove, usando o Princípio da Indução, que vale a desigualdade $2^n < n!$ para todo $n \geqslant 4$.

Solução.

1. **Caso base ($\mathbf{n = 4}$):**

   Verificamos que $2^4 = 16$ e $4! = 24$. Então, de fato, $2^4 < 4!$.

2. **Passo indutivo:**

   Hipótese de Indução (HI): Dado $k \geqslant 4$, suponha que $2^k < k!$

   Queremos mostrar que, se temos a (HI), então vale que $2^{k+1} < (k+1)!$.

   Temos que, se $k \geqslant 4$, então $2 < k+1$. Usando a (HI) e multiplicando membro a membro *, obtemos:

   $$2 \cdot 2^k < 2 \cdot k! < (k+1)k!$$
   $$\Rightarrow 2^{k+1} < (k+1)!$$

   Com isso, provamos o passo indutivo, ou seja, que para $k \geq 4$, vale a implicação $2^k < k! \Rightarrow 2^{k+1} < (k+1)!$.

De (1) e (2) podemos concluir que $2^{n+1} < (n+1)!$ para todo $n \geq 4$.

Exercício 6(c) Prove, usando o Princípio da Indução, que, para $r \neq 0$ fixado:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Solução.

1. **Caso base (n = 1):**

   Temos:
   $$\frac{1 - r^{1+1}}{1 - r} = \frac{(1 - r)(1 + r)}{1 - r} = 1 + r$$
   Assim, verfiicamos o caso base.

2. **Passo indutivo:**

   Hipótese de Indução (HI): Dado $k \geqslant 0$, suponha que $1 + r + r^2 + \cdots + r^k = \dfrac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$

   Precisamos agora mostrar que, admitindo (HI), vale $1 + r + r^2 + \cdots + r^k + r^{k+1} = \dfrac{1 - r^{(k+1)+1}}{1 - r}$.

   De fato:
   $$(1 + r + r^2 + \cdots + r^k) + r^{k+1} \overset{\text{(HI)}}{=} \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} + r^{k+1} = \frac{1 - r^{k+1} + r^{k+1} - r^{k+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{(k+1)+1}}{1 - r}$$

De (1) e (2) podemos concluir que vale $\dfrac{1 - r^{1+1}}{1 - r} = \dfrac{(1 - r)(1 + r)}{1 - r} = 1 + r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.