

**PME 3534 – Técnicas Experimentais e
Computacionais em Biomecânica em Sistemas
Vasculares**

Aula: 30/09/20

Prof. Jayme P. Ortiz

**Método dos Volumes Finitos: Problemas de Difusão Pura e
de Difusão com Convecção. Métodos de Interpolação**

**1. Recapitulação do Esquema de Interpolação das Diferenças
Centradas**

Como apresentado na aula anterior, para a discretização das equações de convecção-difusão é conveniente a definição de duas variáveis:

$F = \rho u \rightarrow$ fluxo de massa convectivo por unidade de área

$D = \frac{\Gamma}{\delta x} \rightarrow$ processo difusivo através das faces.

Os valores dessas variáveis nas células podem ser definidos como:

$$F_w = (\rho u)_w \quad ; \quad F_e = (\rho u)_e \quad \text{(XIIa)}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \quad ; \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \quad \text{(XIIb)}$$

As equações XI e XII da aula passada estão escritas abaixo:

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad \text{(XI)}$$

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad \text{(XII)}$$

Discretizando a equação XI e XII da aula passada resultou, admitindo-se: $A_e = A_w = A$:

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad \text{(XIII)}$$

Continuidade:

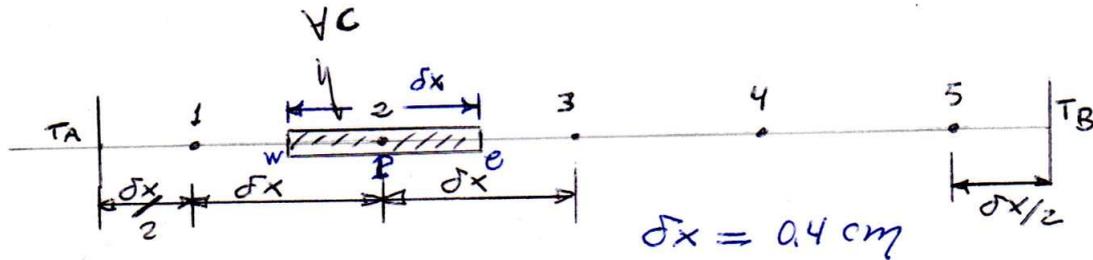
$$F_e - F_w = 0 \quad \text{(XIV)}$$

Adotando o sistema de aproximação de diferenças centradas para a difusão:

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \quad (\text{XVa})$$

$$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \quad (\text{XVb})$$

No exemplo dado na aula passada:



Substituindo essas equações na equação XIII:

$$F_e \frac{\phi_P + \phi_E}{2} - F_w \frac{\phi_W + \phi_P}{2} = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (\text{XVI})$$

Rearranjando os termos:

$$\left[\left(D_w - \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E$$

ou

$$\left[\left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) + (F_e - F_w) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \quad (\text{XVI})$$

ou

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E$$

Sendo:

a_W	a_E	a_P
$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$	$a_W + a_E + (F_e - F_w)$

De modo a satisfazer a equação da continuidade:

$$F_e - F_w = 0 \quad (\text{XIV})$$

No caso dos nós de fronteira (nós 1 e 5 da figura) resulta:

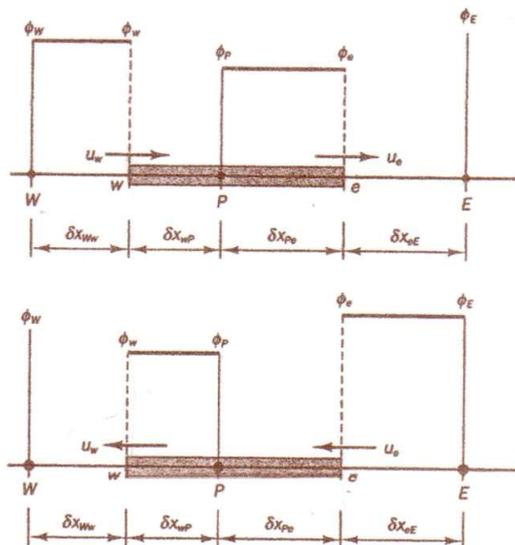
$$\text{Nó 1: } \frac{F_e}{2} (\phi_P + \phi_E) \phi_P - F_A \phi_A = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_A (\phi_P - \phi_A)$$

$$\text{Nó 5: } F_B \phi_B - \frac{F_w}{2} (\phi_P + \phi_W) = D_B (\phi_B - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

O esquema de interpolação das diferenças centradas não reconhece o peso da direção/sentido do escoamento associada ao processo de convecção, com relação ao processo de difusão.

2. Esquema de Interpolação *Upwind*

O esquema *upwind* leva em consideração a direção/sentido do escoamento e neste caso o valor da propriedade extensiva ϕ na face da célula é adotado igual ao valor do nó de montante no sentido do escoamento.



$u_w > 0; u_e > 0 \Rightarrow F_w > 0; F_e > 0$, portanto:

$$\phi_w = \phi_W \text{ e } \phi_e = \phi_P$$

Portanto a equação discretizada:

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (\text{XIII})$$

Pode ser escrita como:

$$F_e \phi_P - F_w \phi_W = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

Rearranjando os termos:

$$(D_w + D_e + F_e) \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_e \phi_e$$

Ou

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)] \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_e \phi_E$$

No caso de direção negativa:

$$\phi_w = \phi_P \text{ e } \phi_e = \phi_E$$

Discretizando:

$$[D_w + (D_e + F_e) + (F_e - F_w)] \phi_P = (D_e + F_e) \phi_E + D_w \phi_W$$

Utilizando a formulação geral:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E$$

Onde:

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

Coefficientes da vizinhança:

	a_W	a_E
$F_w > 0 ; F_e > 0$	$D_w + F_w$	D_e
$F_w < 0 ; F_e < 0$	D_w	$D_e + F_e$

Nós de fronteira:

$$\text{Nó 1: } F_e \phi_P - F_A \phi_A = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_A(\phi_P - \phi_A)$$

$$\text{Nó 5: } F_B \phi_P - F_w \phi_W = D_B(\phi_B - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u$$

$$\text{Sendo: } a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P$$

3. Esquema de Interpolação Híbrido

Este método combina os esquemas de interpolação das diferenças centradas, que é de segunda ordem aplicado a pequenos números de Peclet ($Pe < 2$) e *upwind*, que é de primeira ordem aplicado a maiores valores de Peclet ($Pe \geq 2$).

Lembrando que :

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma/\delta x}$$

A equação do método híbrido para a determinação do fluxo por unidade de área na face oeste do VC, por exemplo é dada por:

$$q_w = F_w \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_W + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_P \right], \text{ para: } -2 < Pe_w < 2$$

$$q_w = F_w \phi_W, \text{ para: } Pe_w \geq 2$$

$$q_w = F_w \phi_P, \text{ para: } Pe_w < -2$$

Equação de discretização do método híbrido permanente e unidimensional é dada por:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

a_W	a_E
$\text{máx} \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\text{máx} \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$

Exercício proposto:

Resolver o exercício anterior aplicando também os métodos *upwind* e híbrido, apresentando as soluções gráficas comparativas e comentando as diferenças, em função dos números de Peclet.

Condições para cada turma:

- a) $u = 0,1 \text{ m/s}$ e 5 nós; $u = 2,5 \text{ m/s}$ e 5 nós; (dif. centradas e *upwind*)
- b) $u = 0,1 \text{ m/s}$; 5 nós; $u = 2,5 \text{ m/s}$; 20 nós; (dif. centradas e *upwind*)
- c) $u = 0,1 \text{ m/s}$ e 5 nós; $u = 2,5 \text{ m/s}$; 5 nós; (dif. centradas e híbrido)
- d) $u = 0,1 \text{ m/s}$ e 5 nós; $u = 2,5 \text{ m/s}$; 20 nós; (dif. centradas e híbrido)
- e) $u = 0,1 \text{ m/s}$ e 5 nós; $2,0 \text{ m/s}$ e 5 nós; (dif. centradas e *upwind*)
- f) $u = 0,1 \text{ m/s}$ e 5 nós; $2,0 \text{ m/s}$ e 5 nós; (dif. centradas e híbrido)
- g) $u = 0,1 \text{ m/s}$ e 5 nós; 3 m/s e 5 nós; (dif. centradas e *upwind*)
- h) $u = 0,1 \text{ m/s}$ e 5 nós; $u = 3 \text{ m/s}$ e 10 nós; (dif. centradas e híbrido)
- i) $u = 0,1 \text{ m/s}$ e 5 nós; $u = 3,0 \text{ m/s}$ e 10 nós; (*upwind* e híbrido)
- j) $u = 0,1 \text{ m/s}$ e 5 nós; $u = 3,0 \text{ m/s}$ e 10 nós; $u = 3,0 \text{ m/s}$ e 20 nós; (diferenças centradas, *upwind*)
- k) $u = 0,1 \text{ m/s}$ e 5 nós; $u = 3,0 \text{ m/s}$ e 10 nós; $u = 3,0 \text{ m/s}$ e 20 nós; (diferenças centradas, híbrido)

Observações:

- I. Os trabalhos deverão ser enviados ao e-mail aantunes@usp.br, até 06/10 às 8:00 am.
- II. Cada grupo apresentará na aula de 07/10 os resultados gráficos comparativos de seu trabalho.

Referência

Versteeg, H.K.; Malalasekera, W. (2007) An Introduction to Computational Fluid Dynamics – The Finite Volume Method. Pearson Prentice Hall – second edition.