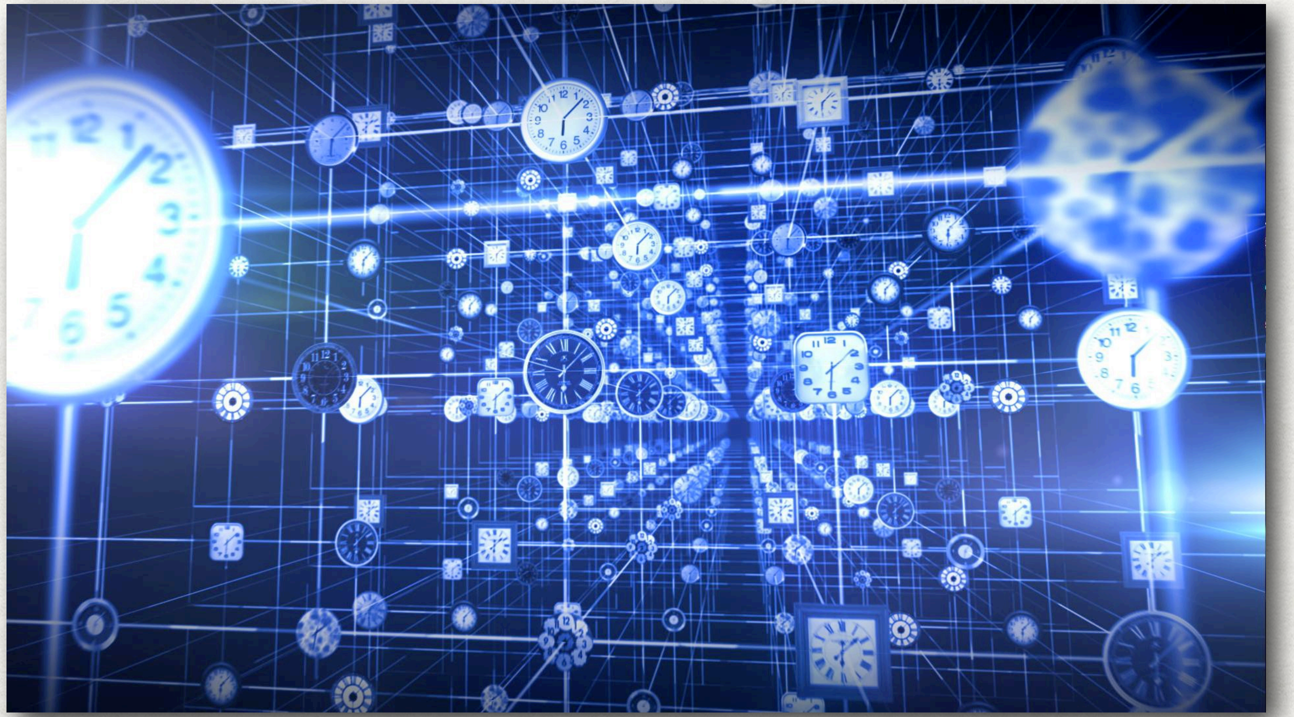
FÍSICA II

MÓDULO III: INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE ESPECIAL

4302112 – IF/USP – PROF. RAUL ABRAMO

AULA 13 - 30/09/2020

- Relatividade e causalidade: o cone de luz
- 4-vetores e 4-velocidade
- Momento relativístico
- Massa e energia
- Conservação de momento e energia na Relatividade



RELATIVIDADE E CAUSALIDADE

- Na aula passada vimos que a **ordem temporal** de eventos não é necessariamente absoluta (depende do referencial).

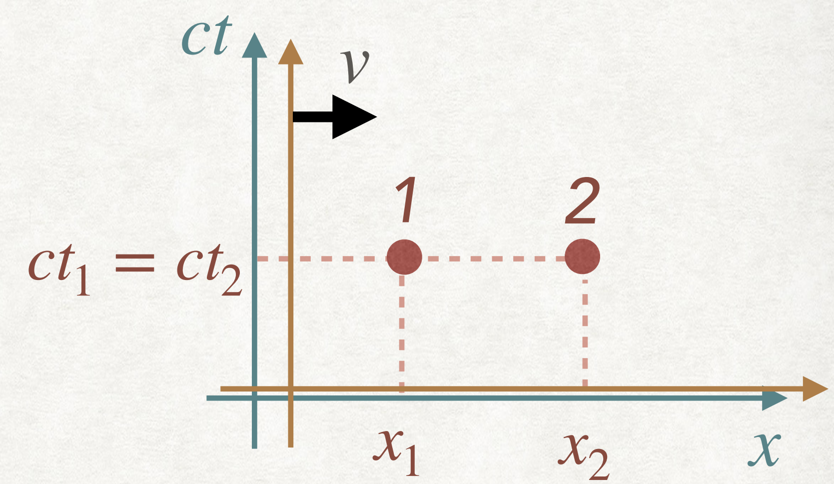
- Mas certamente existem certos eventos que ***têm*** uma ordem temporal absoluta: se um evento **1** é a ***causa*** de um evento **2**, então deve ser ***sempre*** verdade que **1** ocorre **antes** de **1** — **em qualquer referencial**.

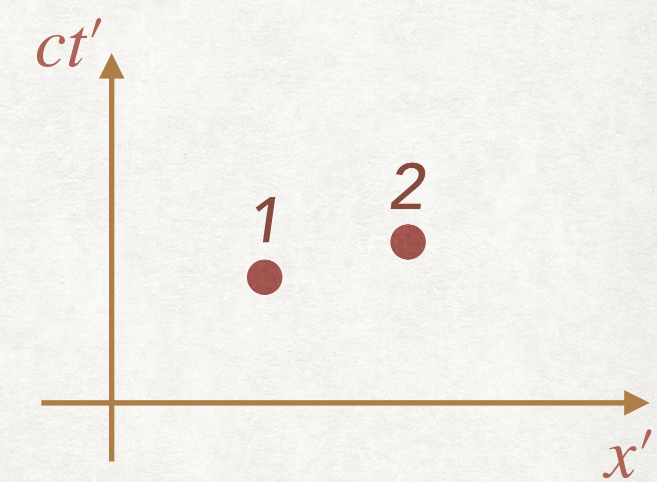
- A chave para isso é, como sempre em Relatividade, a velocidade da luz.

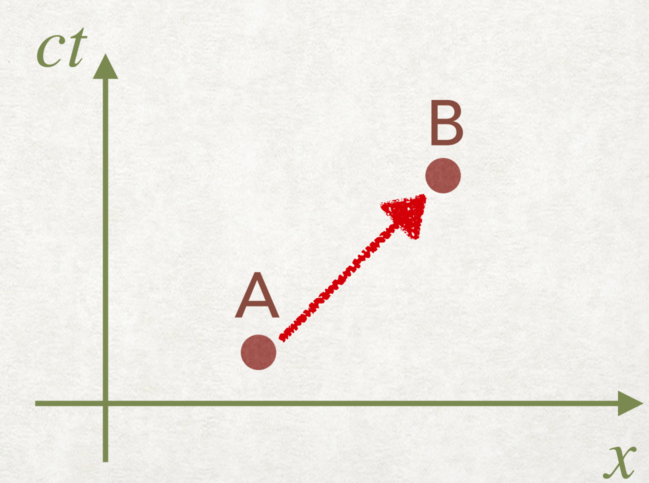
- Todas as interações e fenômenos físicos na natureza (forças, ondas, corpos em movimento) têm velocidades iguais ou inferiores à da luz.

- Logo, se enviamos um sinal de luz de um ponto **A** a um ponto **B**, essa é a maneira mais rápida de uma ***"causa"*** em **A** levar a uma ***"consequência"*** em **B**.

- Essa relação deveria certamente ser preservada em qualquer referencial — certo? Vamos checar!







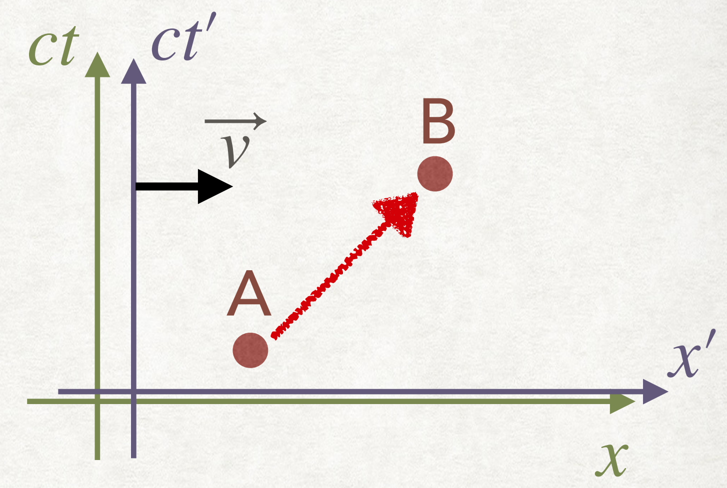
RELATIVIDADE E CAUSALIDADE

- Vamos começar notando que o intervalos de tempo (Δt) e de espaço (Δx) entre quaisquer eventos A e B são relacionados pelas transformações de Lorentz:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad , \quad \Rightarrow \quad c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\, \Delta x)$$

$$x' = \gamma(x - \beta\, ct) \quad , \quad \Rightarrow \quad \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta\, c\Delta t)$$

$\beta = v/c$,
$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$



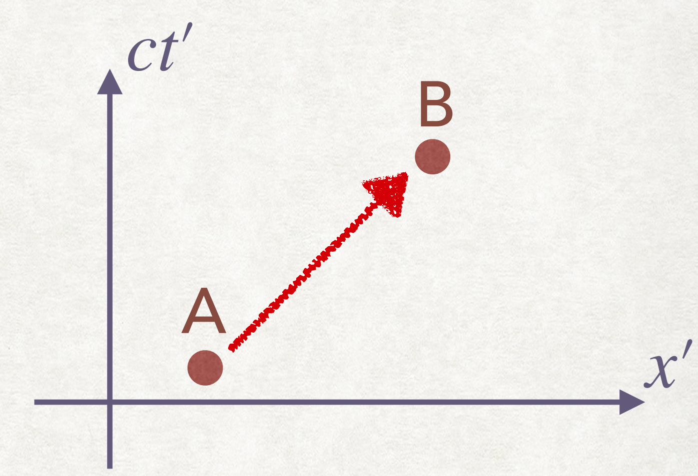
- Vamos tomar os intervalos entre os eventos **A** e **B** relacionados por um raio de luz que caminha para a direita no referencial **S**, como indicado na figura. Os intervalos de tempo e de distância são ligados por:

$$\Delta x_{AB} = c\Delta t_{AB}$$

- Agora vamos ver o que ocorre com esses intervalos no referencial ***S'***:

$$c\Delta t'_{AB} = \gamma(c\Delta t_{AB} - \beta\, \Delta x_{AB}) = \gamma(1 - \beta)\Delta x_{AB}$$

$$\Delta x'_{AB} = \gamma(\Delta x_{AB} - \beta\, c\Delta t_{AB}) = \gamma(1 - \beta)\Delta x_{AB}$$



- Ou seja, no referencial S' também temos $\Delta x'_{AB} = c\Delta t'_{AB}$!

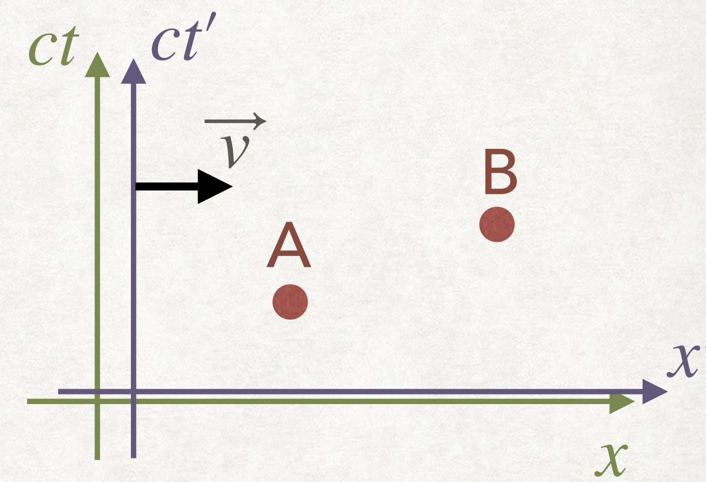
- Ou melhor: se num referencial inercial S temos $c^2\Delta t^2_{AB} - \Delta x^2_{AB} = 0$, então num outro referencial inercial qualquer temos também $c^2\Delta t'^2_{AB} - \Delta x'^2_{AB} = 0$!

O CONE DE LUZ

- De fato, há algo ***mais profundo*** em jogo aqui. Vamos construir a seguinte "distância espaço-temporal" entre dois eventos quaisquer:

$$\boxed{\Delta s^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{x}^2}$$

Note: Δs^2 pode ser positivo ou negativo!



- Vamos calcular o que é esse intervalo de espaço-tempo num referencial ***S'***, usando as transformações de Lorentz:

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\,\Delta x) \quad , \quad \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta\, c\Delta t) \quad , \quad \Delta y' = \Delta y \;\; , \;\; \Delta z' = \Delta z$$

$$\Rightarrow \quad \Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta \vec{x}'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$$

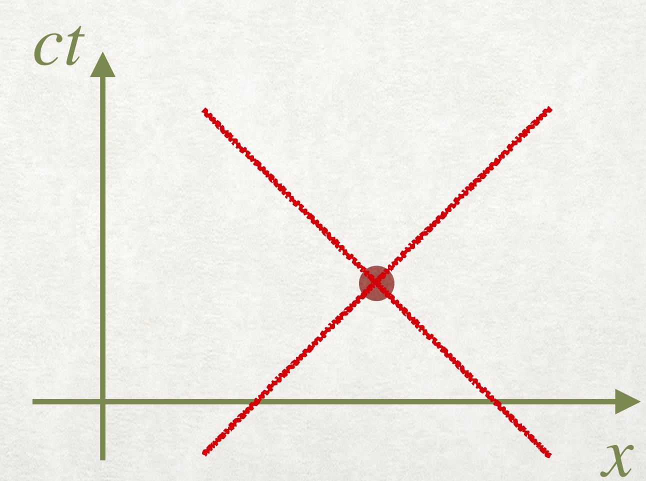
$$= \gamma^2 (c\Delta t - \beta \Delta x)^2 - \gamma^2 (\Delta x - \beta\, c\Delta t)^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$= \underline{\gamma^2 \left[(1-\beta^2)(c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2) - 2\beta c \cancel{\Delta t} \Delta x + 2\beta c \cancel{\Delta t} \Delta x \right]} - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

- Mas lembre-se que $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, logo $\gamma^2 (1-\beta^2) = 1$, e portanto:

$$\boxed{\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta \vec{x}'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{x}^2 = \Delta s^2}$$

- Ou seja, o intervalo de distância Δs^2 é ***invariante***!



- Em particular, tudo que está no "cone" $c^2 \Delta t^2 = \Delta \vec{x}^2$ num referencial, está no cone $c^2 \Delta t'^2 = \Delta \vec{x}'^2$ em ***qualquer*** referencial. Esse cone se chama ***cone de luz***.

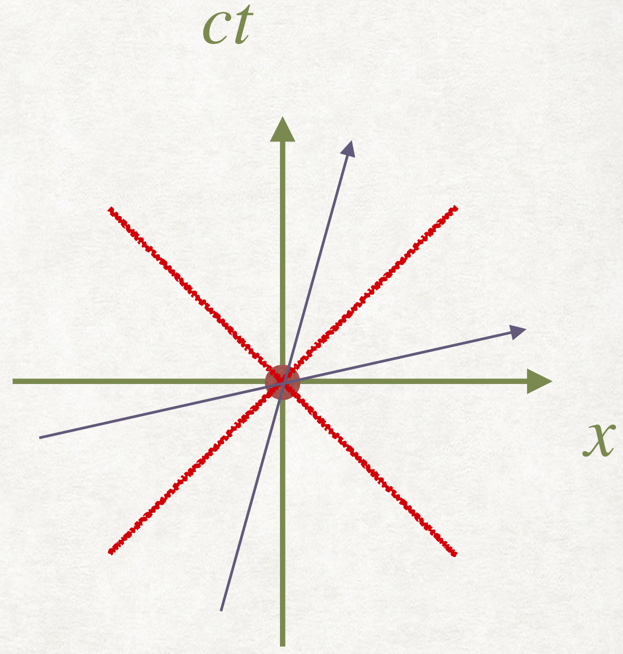
O CONE DE LUZ

- O ***cone de luz*** é um ***invariante*** da "geometria hiperbólica" implícita nas transformações de Lorentz:

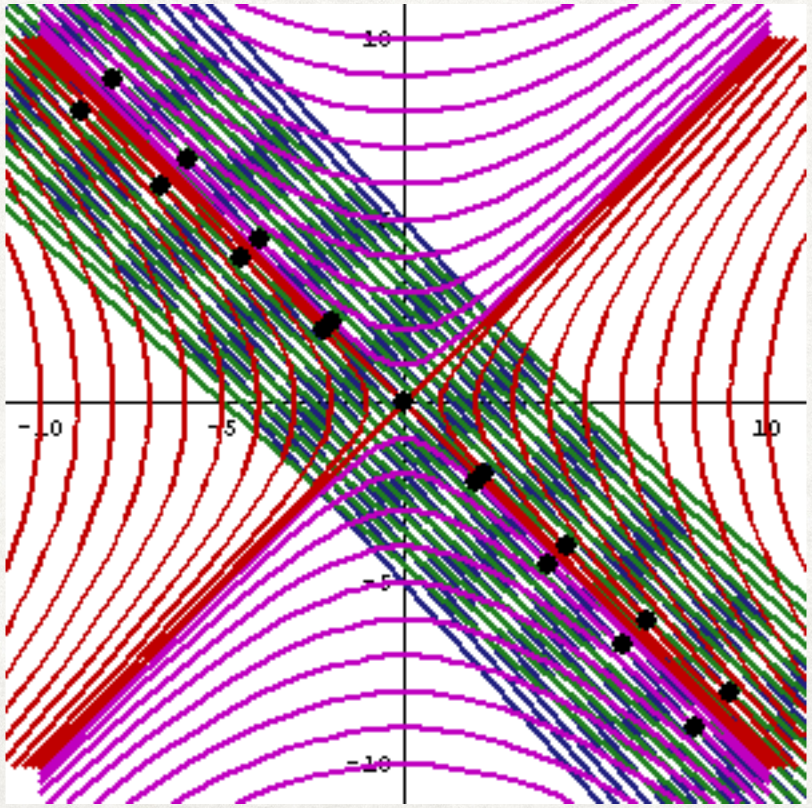
$$c\Delta t' = c\Delta t \cosh\theta - \Delta x \,\mathrm{senh}\,\theta$$

$$\Delta x' = -\, c\Delta t \,\mathrm{senh}\,\theta + \Delta x \cosh\theta$$

onde lembre-se que $\tanh\theta = \beta = v/c$



- Na Wikipedia tem uma animação muito legal de como esse cone de luz permanece invariante sob transformações de Lorentz:



Veja também:
https://www.desmos.com/calculator/pc7azsxteh

O CONE DE LUZ

- OK, então a principal conclusão é que esse ***intervalo de espaço-tempo*** (e, em particular, o ***cone de luz)*** é um ***invariante***:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{x}^2 = \Delta s'^2$$

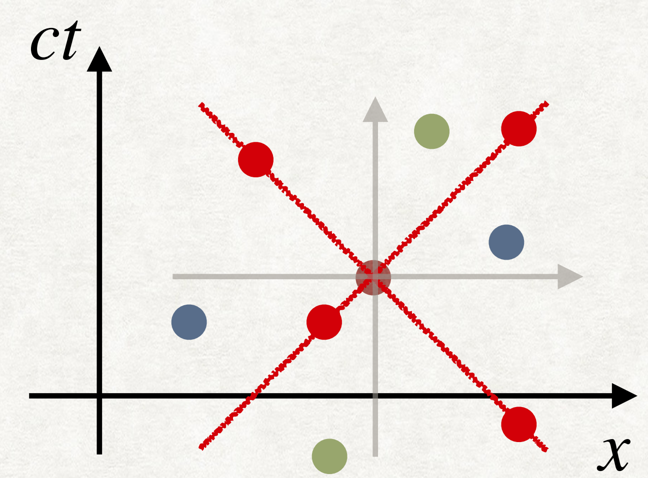
- Ou seja, tanto Δt quanto Δx podem mudar, mas Δs^2 ***fica constante***.

- Note, em particular, que se Δs^2 é invariante, certamente o ***sinal*** desse "intervalo espaço-temporal" é o mesmo em qualquer referencial:

$\Rightarrow \quad \Delta s^2 > 0 \quad , \quad c^2 \Delta t^2 > \Delta \vec{x}^2$ "Distância tipo-tempo"

$\Rightarrow \quad \Delta s^2 < 0 \quad , \quad c^2 \Delta t^2 < \Delta \vec{x}^2$ "Distância tipo-espaço"

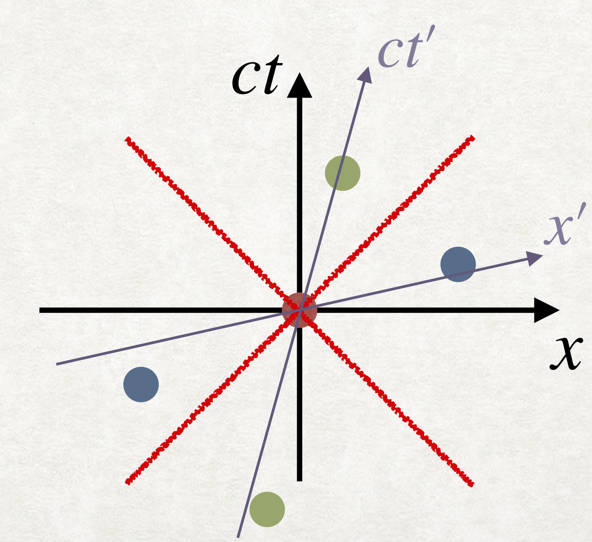
$\Rightarrow \quad \Delta s^2 = 0 \quad , \quad c^2 \Delta t^2 = \Delta \vec{x}^2$ "Distância nula", ou "tipo-luz"



- **Essa classificação vale em qualquer referencial, já que** $\Delta s'^2 = \Delta s^2$ **!**

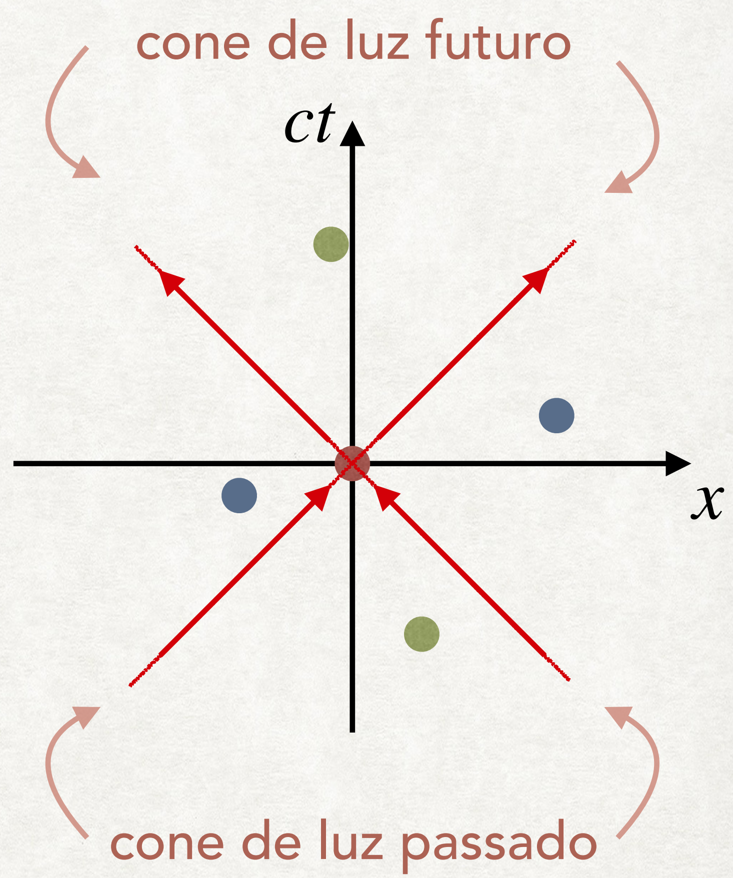
- Sempre podemos redefinir a origem (espaço-temporal) do nosso sistema de coordenadas em um evento específico, e considerar o cone de luz desde aquele ponto — e assim, $\Delta t \to t$, e $\Delta x \to x$.

- Agora fica ainda mais fácil ver que em qualquer referencial o ***tipo*** da distância da origem a qualquer ponto não se altera por uma mudança de referencial.



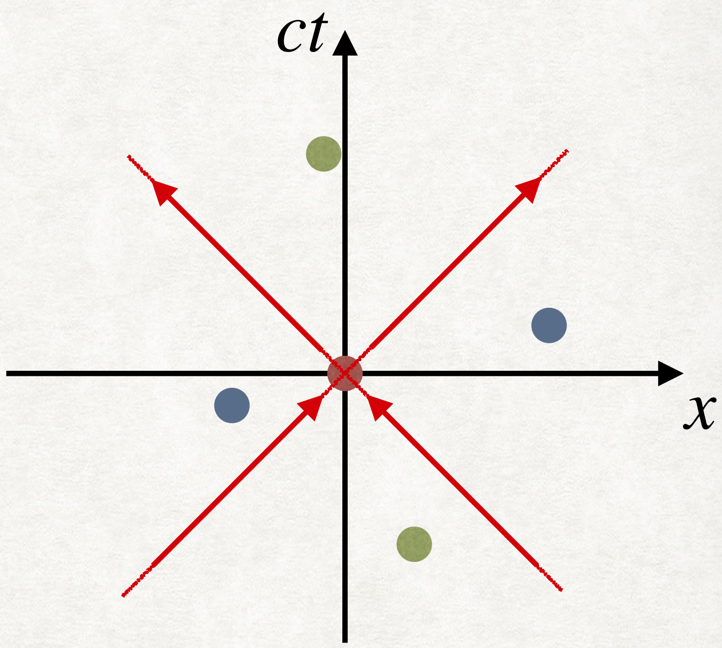
CONE DE LUZ E CAUSALIDADE

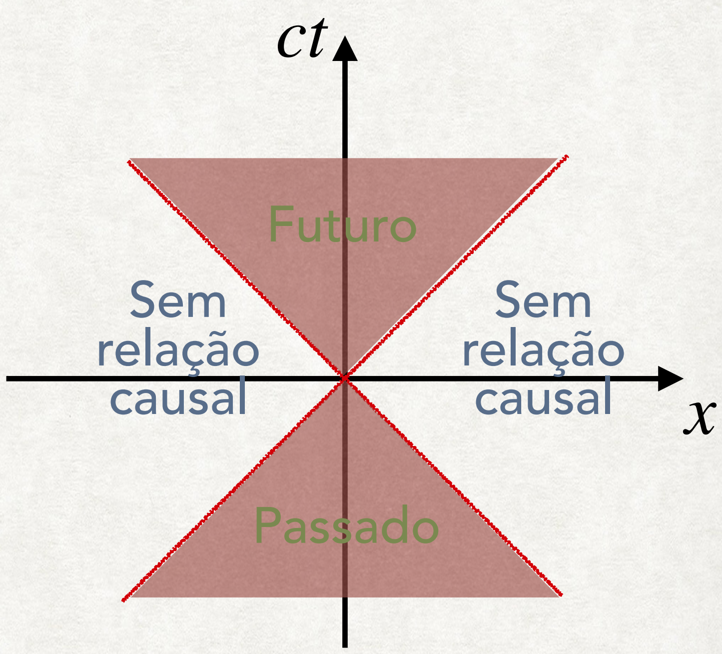
- Vamos continuar a explorar o cone de luz — a região $|ct| = |x|$.
- Raios de luz que ***chegam na origem*** caminham sobre o cone de luz, desde o ***passado*** do evento-origem
- Raios de luz que ***partem da origem*** caminham sobre o cone de luz, para o ***futuro*** do evento-origem
- Eventos que ficam ***abaixo*** do cone de luz ***passado*** têm uma ***distância do tipo-tempo*** com a origem, $c^2t^2 > x^2$, e ademais eles estão no ***passado*** do evento-origem: $ct < -|x|$.
- Eventos que ficam ***acima*** do cone de luz futuro também têm uma distância do tipo-tempo com a origem, $c^2t^2 > x^2$, mas eles estão no ***futuro*** do evento-origem: $ct > |x|$.
- Finalmente, eventos que estão ***fora do cone*** (ou seja, abaixo do cone de luz futuro e acima do cone de luz passado) têm uma ***distância do tipo-espaço*** com o evento-origem.



CONE DE LUZ E CAUSALIDADE

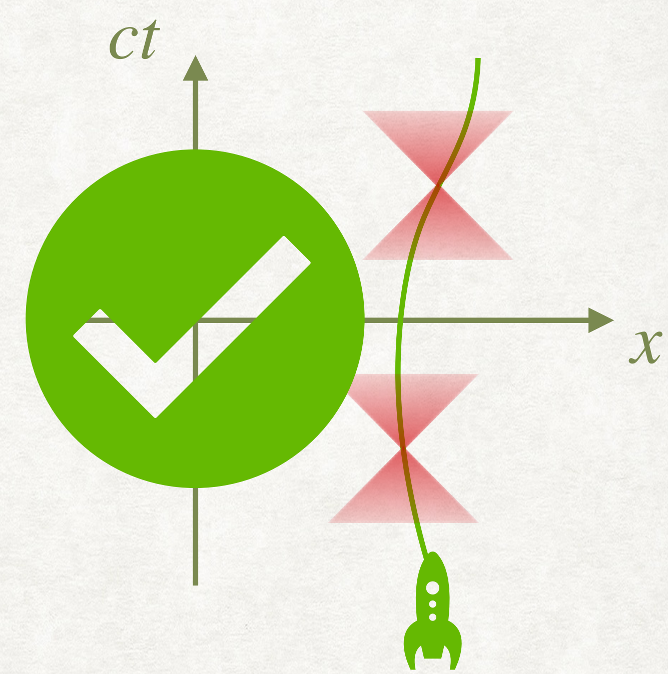
- O cone de luz é um ***invariante de Lorentz***, portanto essa relação entre eventos é universal, ***absoluta***.
- Ou seja, eventos que ficam ***dentro do cone de luz passado estão no passado absoluto*** do evento- origem;
- Eventos que ficam ***dentro do cone de luz futuro estão no futuro absoluto*** do evento-origem;
- Eventos que estão ***fora do cone de luz*** não estão nem no passado nem no futuro do evento-origem: em alguns referenciais eles estão no passado, em outros, no futuro.
- Portanto, eventos no ***passado absoluto*** podem ser a ***causa*** de algum evento na origem; e a origem pode ser a causa de algum evento no ***futuro absoluto***.
- Porém, eventos com ***distâncias do tipo-espaço não têm relação causal*** com o evento na origem do cone. Nesse caso dizemos que os eventos são "***causalmente desconexos***".

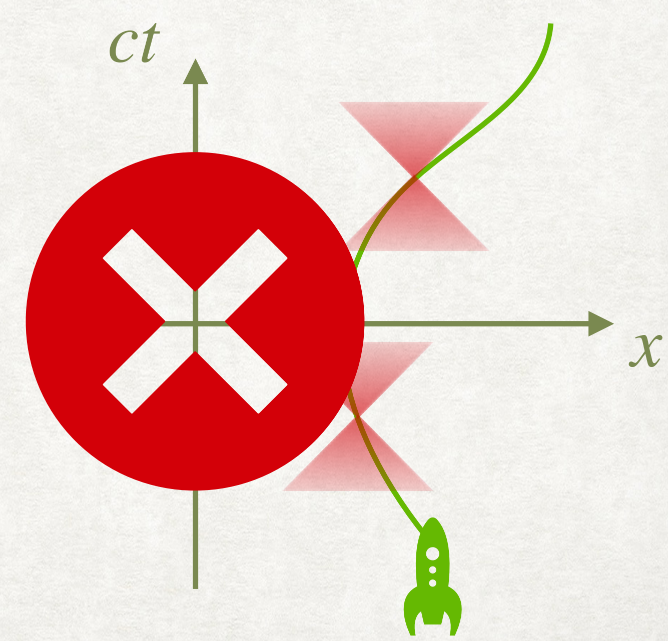




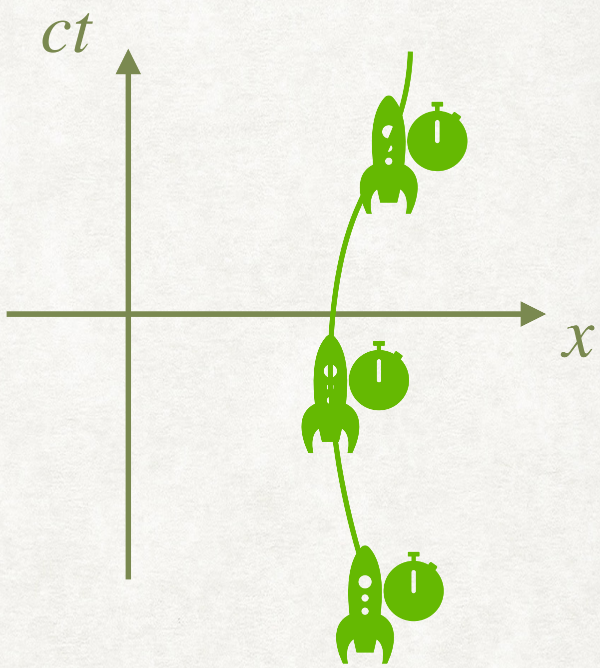
CONE DE LUZ E CAUSALIDADE

- O ***cone de luz*** também é um vínculo sobre as linhas de mundo de um objeto qualquer.
- Como a velocidade de um corpo é sempre menor que a velocidade da luz, a linha de mundo sempre “entra" pelo cone de luz passado e “sai" pelo cone de luz futuro de todos os eventos dessa linha de mundo.
- Nenhum objeto pode ter uma linha de mundo que “escape" do cone de luz, em nenhum ponto.





TEMPO E COMPRIMENTO PRÓPRIOS



- Todo ***referencial*** implica um ***conjunto de réguas e relógios.***

- O ***tempo e comprimento próprios de um corpo*** são as medidas de tempo e de distância medidas no ***referencial que se move junto com aquele objeto*** (ou seja, no referencial que está em repouso com respeito ao objeto).

- Em particular, o ***tempo próprio*** de um objeto qualquer é o ***tempo medido no referencial*** S_0 ***daquele objeto*** — mesmo que esse objeto esteja em movimento.

- Note agora que esse tempo próprio tem um ***caráter invariante***, no seguinte sentido. Considere o ***intervalo invariante*** medido no referencial do objeto:

$$ds_0^2 = c^2 dt_0^2 - d\vec{x}_0^2$$

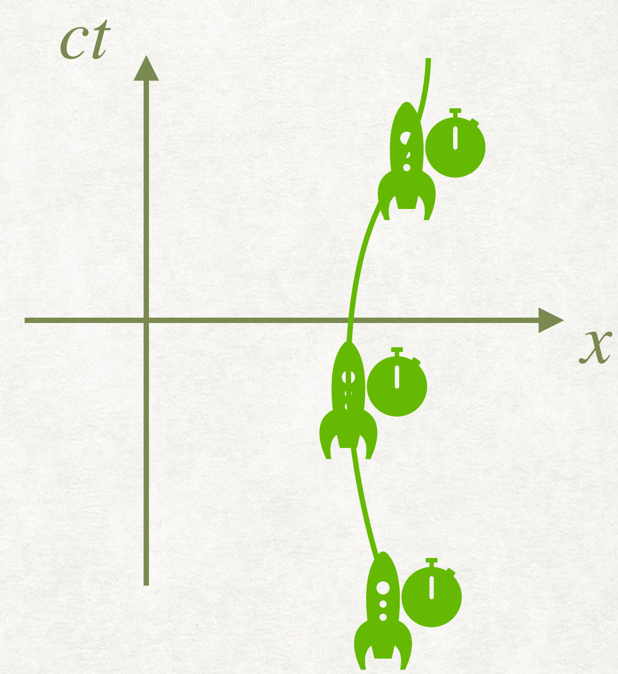
Mas o objeto está em repouso no seu próprio referencial, logo $d\vec{x}_0 = 0$, e assim temos que:

$$ds_0^2 = c^2 dt_0^2 \equiv c^2 d\tau^2$$, onde τ é o ***tempo próprio*** daquele objeto.

- Como ds_0 é invariante, temos que τ ***é um invariante***!

TEMPO E COMPRIMENTO PRÓPRIOS

- Vamos agora fazer a seguinte pergunta: qual a relação entre o ***tempo medido num referencial*** S e o ***tempo próprio*** de um objeto que se move?



- Note que:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 \right] = c^2 \frac{dt^2}{\gamma^2} \quad ,$$

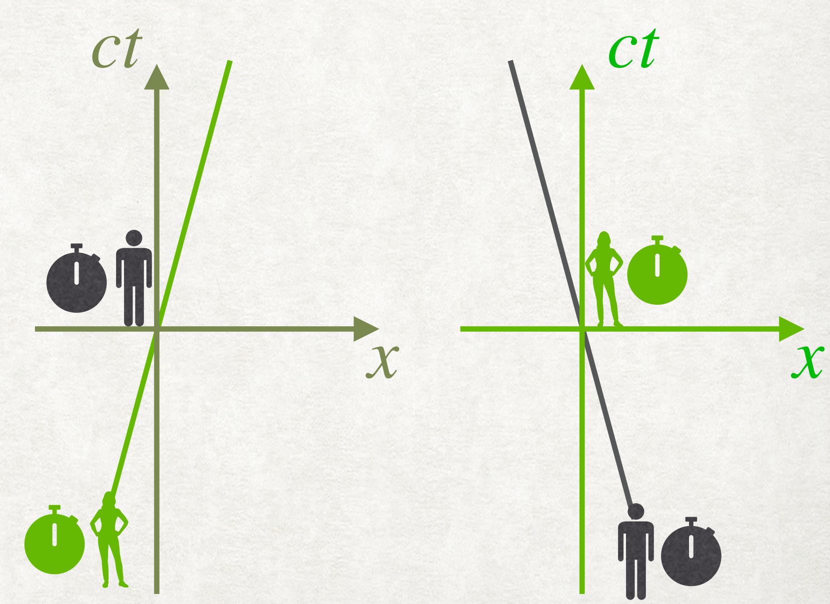
onde $\vec{x}(t)$ é a ***posição do objeto*** em qualquer instante t, e $d\vec{x}/dt$ é a ***velocidade*** desse objeto como medidos no referencial S.

- Lembre agora que $c^2 d\tau^2 = ds_0^2 = ds^2$ (invariante!), portanto:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

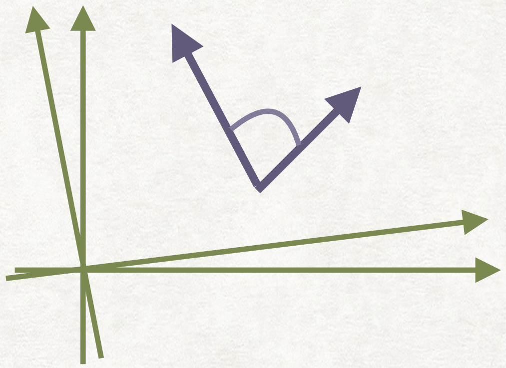
- Note que $\gamma > 1$, o que significa que ***o tempo próprio é sempre menor*** que o ***tempo medido num outro referencial***. Isso é mais uma manifestação do efeito de "dilatação do tempo" discutido na aula passada.

- Na Relatividade Restrita esse relação é ***recíproca***: eu vejo o seu tempo passar mais devagar, e você vê o meu tempo passar mais devagar.



TEMPO E ESPAÇO: 4-VETORES

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a|\,|b|\,\cos\varphi$$
$$= a^x b^x + a^y b^y + a^z b^z$$
$$= a^{x\prime} b^{x\prime} + a^{y\prime} b^{y\prime} + a^{z\prime} b^{z\prime}$$



- Já vimos como as ***coordenadas*** de eventos são dadas pelas 4 quantias $\{ct, x, y, z\}$, e que a ***distância invariante*** indica uma espécie de ***norma*** dessas coordenadas, e que tem um ***sentido independente do referencial*** (assim como o ***produto escalar*** de dois vetores puramente espaciais não depende do sistema de coordenadas).

- De fato, para esse "4-vetor" $X \equiv \{ct, x, y, z\}$ podemos usar a notação:

$$||X||^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t^2 - \vec{x}^2$$

- Note que esse é um ***tipo de produto escalar***, mas que combina de um modo um pouco diferente as componentes.

- No caso mais familiar, de 3 dimensões espaciais, os vetores têm uma norma que segue a ***geometria Euclideana***, e assim, se $\vec{a} = \{a^x, a^y, a^z\}$ temos:

$$|\vec{a}|^2 = (a^x)^2 + (a^y)^2 + (a^z)^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij}\, a^i\, a^j$$

Geometria Euclideana:

$$|\vec{a}|^2 = (a^x \; a^y \; a^z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^x \\ a^y \\ a^z \end{pmatrix}$$

Métrica Euclideana: δ_{ij}

TEMPO E ESPAÇO: 4-VETORES

- Em 3+1 dimensões (tempo e espaço) isso não funciona mais: a ***geometria é diferente***! Nesse caso temos a chamada ***Geometria de Minkowski***, que nos diz que as componentes de um vetor devem ser combinadas do mesmo modo que usamos para calcular o invariante de distância espaço-temporal.

- Dado um vetor $A = \{A^t, A^x, A^y, A^z\}$ a ***norma de Minkowski*** desse vetor é:

$$||A||^2 = (A^t)^2 - (A^x)^2 - (A^y)^2 - (A^z)^2$$

- Essa expressão fica mais fácil se distinguirmos melhor as componentes, em termos de ***índices***:

$$A^t \to A^0 \quad , \quad A^x \to A^1 \quad , \quad A^y \to A^2 \quad , \quad A^z \to A^3$$

- Desse modo, a norma desse 4-vetor é dada pela combinação:

$$||A||^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

$$= \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$$

- ***A Relatividade nos diz, ao fim e ao cabo, que todos os "vetores" que entram nas leis físicas e na descrição da Natureza têm que ser 4-vetores.***

Geometria Euclideana:

$$|\vec{a}|^2 = (a^x \ a^y \ a^z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^x \\ a^y \\ a^z \end{pmatrix}$$

Métrica Euclideana: δ_{ij}

Geometria de Minkowski:

$$||A||^2 = (A^0 \ A^1 \ A^2 \ A^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

Métrica de Minkowski: $\eta_{\mu\nu}$

Produto escalar em Minkowski:

$$||AB|| = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3$$

$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

4-VELOCIDADE

- Um corpo qualquer em movimento tem, num referencial S, uma velocidade $\vec{v} = d\vec{x}/dt$. Mas qual o ***4-vetor*** que podemos definir para expressar a ***velocidade*** de um corpo?

- Poderíamos começar tentando definir algo como:

$$V = \frac{d}{dt}\{ct, x, y, z\} \ ,$$

mas essa seria uma expressão bem estranha, afinal tanto dt quanto $d\vec{x}$ fazem parte do mesmo 4-vetor $\{c\,dt, dx, dy, dz\}$! Seria o mesmo que usar algo como dy/dz numa expressão… Você até pode definir isso, mas provavelmente não vai a lugar nenhum.

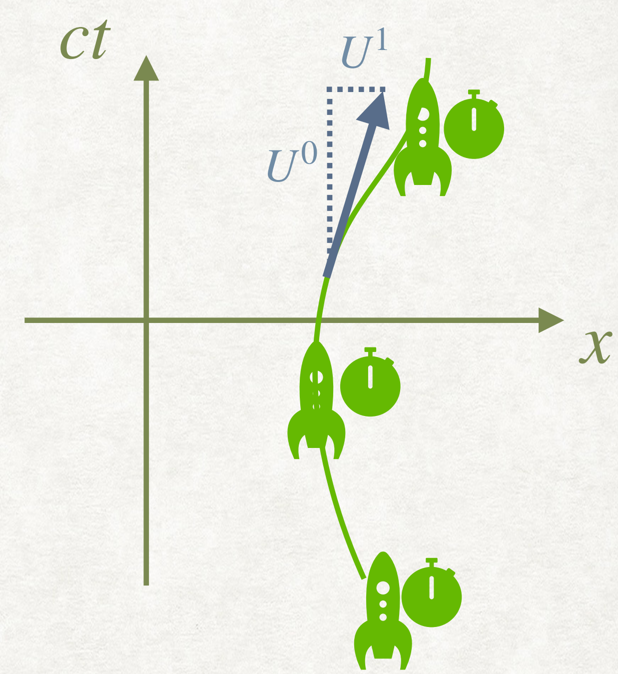
- Em vez de tomar esse deslocamento de um 4-vetor com respeito a uma componente dele mesmo, é muito mais natural tomar o deslocamento como função de algo que seja o mais geral e universal possível, algo absoluto… algo… ***invariante***!

- Ora, o "tempo invariante" de um objeto qualquer é o ***tempo próprio,*** τ. Então, definimos a ***4-velocidade como medida em relação ao tempo próprio***:

$$U^\mu = \frac{d}{d\tau}\{ct, x, y, z\} = \left\{\frac{d\,(ct)}{d\tau}, \frac{d\,x}{d\tau}, \frac{d\,y}{d\tau}, \frac{d\,z}{d\tau}\right\} = \left\{\frac{d\,(ct)}{d\tau}, \frac{d\,\vec{x}}{d\tau}\right\}$$

- Lembre-se agora que a ***relação entre o tempo próprio*** do corpo em movimento e o ***tempo do sistema de coordenadas*** é dada por $d\tau = dt/\gamma(v)$, com $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ a velocidade do corpo medida pelo referencial. Portanto, temos que:

$$U^\mu = \left\{\gamma\, c\,, \gamma\frac{d\,\vec{x}}{dt}\right\} = \gamma\,\left\{c\,, \vec{v}\right\}$$



4-VELOCIDADE

- A 4-velocidade definida desse modo, $U^\mu = d\,x^\mu / d\tau = \gamma \left\{ c \, , \overrightarrow{v} \right\}$, possui uma norma:

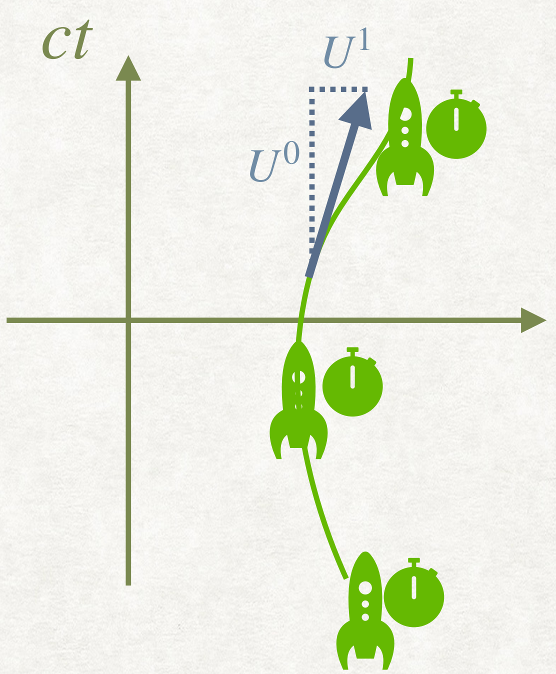
$$||U||^2 = (U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu$$

- Substituindo os valores de $U^0 = \gamma(v)\, c$ e $U^i = \gamma(v)\, v^i$ $(i = 1{,}2{,}3)$ temos que:

$$||U||^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad .$$

Mas $\gamma^2 = 1/(1 - v^2/c^2)$, portanto:

$$\boxed{||U||^2 \overset{!}{=} c^2}$$

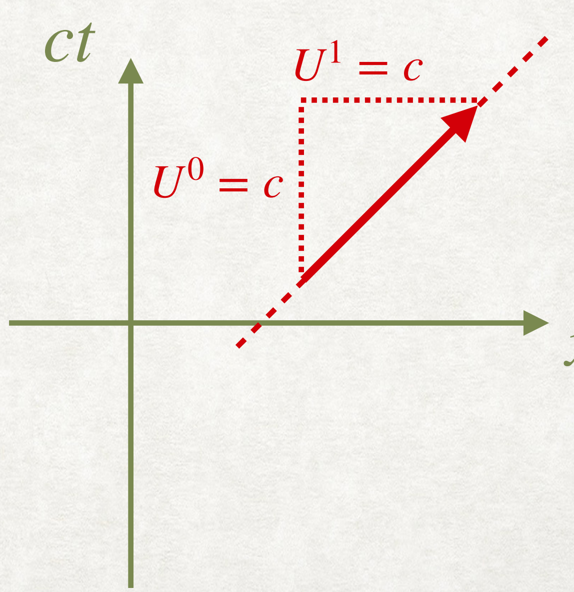


- Note que o deslocamento do corpo no referencial S se dá com uma velocidade 3-dimensional $\overrightarrow{v} = d\,\overrightarrow{x}/dt$ (como não poderia deixar de ser!). Mas ***qualquer objeto físico*** tem uma 4-velocidade com ***norma*** $||U||^2 = c^2$***, independente de*** $\overrightarrow{v}$ ***!***

- Qualquer objeto físico ***exceto... a luz!*** No caso da luz, o fator γ não está definido (afinal, ele seria infinito!), e não temos um "tempo próprio" (afinal, não existe um referencial que anda junto com a luz!), e nesse caso temos:

$$U^\mu_{luz} = \{c, c\,\hat{n}\} \quad ,$$

onde o vetor unitário $\hat{n}$ denota a direção de propagação do raio de luz. É fácil verificar (cheque isso!) que $||U_{luz}||^2 = 0$.



4-MOMENTO

- Na física "clássica", não-relativística, uma relação entre massa, velocidade e momento:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- Na Relatividade isso não é diferente, exceto que agora temos a ***4-velocidade***, e portanto somos naturalmente levados a uma quantidade (um 4-vetor!) que podemos chamar de ***4-momento***:

$$p^\mu \;=\; m\,U^\mu \;=\; m\,\gamma(v)\,\{c\,,\vec{v}\}$$

- Mas... o que seria essa nova componente "temporal" do momento, $p^0 = m\gamma c$?

- Nessas horas é sempre bom tomar o ***limite não-relativístico*** e ver onde chegamos, fazendo uma correspondência com a física Newtoniana. Expandindo o fator γ em $v/c \ll 1$ e substituindo na expressão temos:

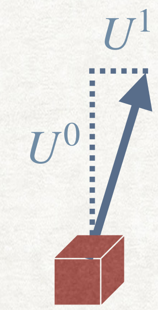
$$p^0 \simeq mc\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots\right)$$

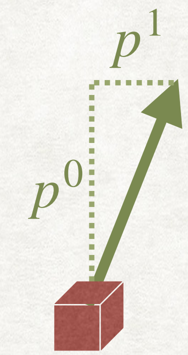
$$p^0 \simeq mc + \frac{1}{2}\frac{m\,v^2}{c} + \dots$$

- Podemos re-escrever essa expressão de um modo mais intuitivo:

$$p^0 \simeq \frac{1}{c}\left(mc^2 + \frac{1}{2}m\,v^2 + \dots\right)$$

Energia cinética!

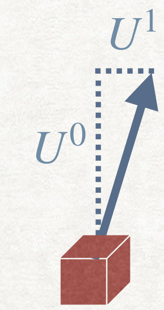




4-MOMENTO: ENERGIA E QUANTIDADE DE MOVIMENTO

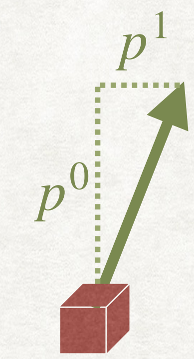
- Como p^0 tem ao menos uma parte que claramente tem a interpretação de energia cinética, essa componente deve ser a ***energia*** do corpo de massa m (a menos do fator de c, que simplesmente converte unidades de energia em unidades de momento):

$$p^0 = \frac{E}{c}$$



- Portanto, o ***4-momento*** de uma partícula compreende não apenas o seu ***momento linear*** (3D), mas também a sua ***energia***:

$$\boxed{p^\mu \;=\; m\,U^\mu \;=\; m\,\gamma(v)\,\{c\,,\vec{v}\}}$$



- Além disso, descobrimos que, mesmo em repouso, existe uma energia "mínima" guardada numa partícula de massa m, a famosa ***energia de repouso***:

$$E_0 = c\,p^0(v \to 0) = m\,c^2\,!$$

- Por sinal, assim como no caso da 4-velocidade, a ***norma*** do 4-momento é um ***invariante***:

$$\boxed{||p||^2 = m^2||U||^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2\,c^2}$$

- No caso de partículas de massa nula (p.ex., fótons, as "partículas de luz") temos:

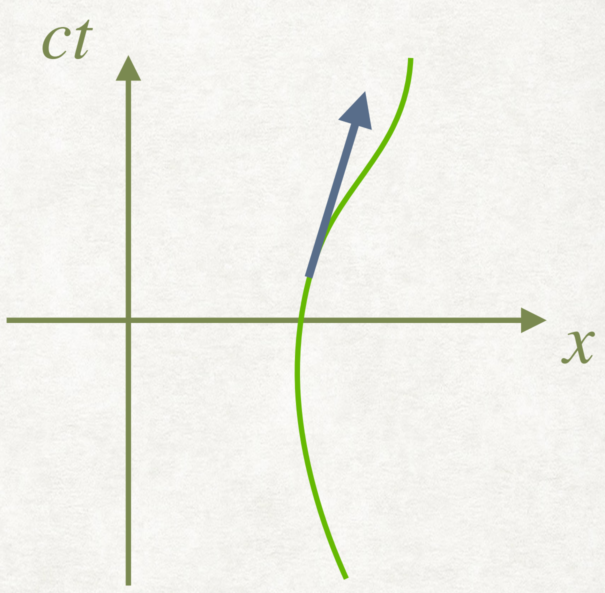
$$p^\mu_{luz} = \left\{ \frac{E_{luz}}{c}, \vec{p}_{luz} \right\}$$, onde E_{luz} é a ***energia da luz***.

Mas note que, como a massa da luz é nula, temos $||p_{luz}||^2 = m^2_{luz}||U_{luz}||^2 = 0$, logo:

$$\vec{p}_{luz} = \frac{E_{luz}}{c}\,\hat{n}$$, onde $\hat{n}$ é a ***direção de propagação*** do raio de luz.

DINÂMICA RELATIVÍSTICA

- Na física clássica, Newtoniana, as equações de movimento são dadas simplesmente pela segunda Lei de Newton:



$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\,\vec{p}}{dt}$$

- Mas… e agora? Como vimos acima, todos os vetores que fazem parte das Leis da Física devem ser 4-vetores, certo? Como fica então a 2a lei?

- Vamos generalizar a equação acima e ver onde chegamos. Só lembre que não faz sentido tomar a derivada de um vetor com relação ao tempo no referencial (ele mesmo parte de um 4-vetor!), então tomamos a derivada com respeito ao tempo próprio:

$$f^\mu = \frac{d\,p^\mu}{d\tau}$$

- Essa definição leva a algumas coisas interessantes. Em particular, note que o produto escalar:

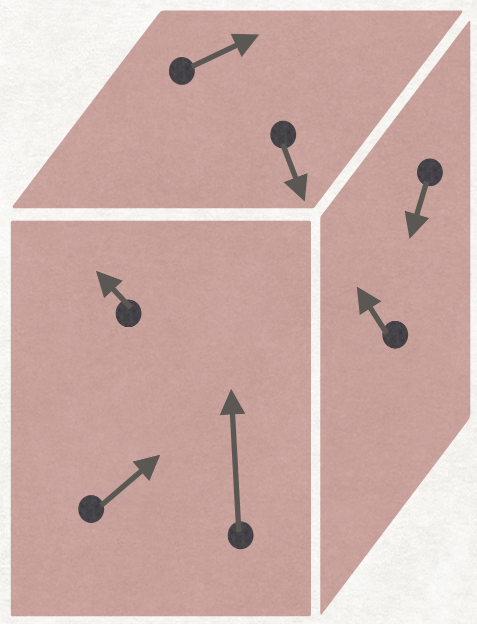
$$\vec{F} \cdot \vec{P} \quad \leftrightarrow \quad ||f\,p|| = f^0 p^0 - f^1 p^1 - f^2 p^2 - f^3 p^3 \overset{!}{=} 0$$

- **Exercício:** use os resultados que derivamos até agora para demonstrar essa igualdade, e interprete o resultado em termos da noção de ***trabalho***.

DINÂMICA RELATIVÍSTICA

- Assim como na física clássica, as leis da dinâmica relativística também nos dizem que, na ausência de forças externas, o 4-momento se conserva — seja para uma partícula, seja para um sistema de partículas:

$$P^\mu = \sum_n p^\mu_{(n)} = const\,.$$



- Isso significa, ao mesmo tempo:

  ➡ **Conservação de energia**

  ➡ **Conservação de momento**

- ***Próxima aula***: exemplos e exercícios de dinâmica relativística, física nuclear e muito mais…!