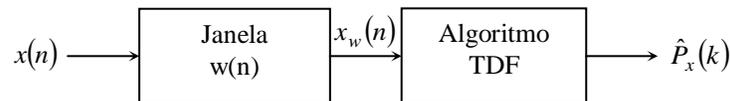


## Estimação Espectral Clássica

### 1. Introdução

Os sinais aleatórios apresentam energia infinita e, portanto não possuem transformadas de Fourier, mas como eles apresentam potência finita é possível determinar a Densidade Espectral de Potência destes sinais. Neste capítulo serão discutidos métodos numéricos para a estimação da densidade espectral de potência baseados no uso da transformada discreta de Fourier (TDF). Em particular, iremos estudar: o periodograma, o periodograma médio, o estimador de Blackman-Tukey e o método de Welch. Estes métodos são referidos como técnicas clássicas para distinguí-los dos métodos mais modernos conhecidos como estimação espectral paramétrica.

Em muitas aplicações práticas tem-se disponível somente uma função amostra de um sinal a ser analisado, não temos uma descrição completa do modelo e dispomos somente de um segmento finito de tamanho  $N$ . Assim, podemos calcular somente uma aproximação (estimativa) da densidade espectral de potência. Admitindo um sinal de tempo discreto, o cálculo do espectro é basicamente realizado em dois passos: primeiro passamos o sinal por uma janela de dados  $w(n)$  e em seguida calculamos a densidade espectral de potência utilizando a transformada discreta de Fourier, como mostra o diagrama de blocos da figura 1.



**Figura 1:** Sistema para o cálculo da densidade espectral de potência.

Na prática o espectro do sinal deve ser estimado nas partes estacionárias do sinal, pois a composição espectral pode variar com o tempo. Portanto é comum particionar o sinal em segmentos ou quadros antes do processamento. Esta operação é equivalente a multiplicar o sinal por uma janela de dados  $w(n)$  e dois parâmetros devem ser fornecidos: a duração de cada quadro e a superposição entre eles.

### 2. Consequência do uso de janelas

Os dados disponíveis para o cálculo da densidade espectral de potência de um segmento do sinal podem ser expressos como:

$$x_w(n) = x(n)w(n) \quad 1$$

em que  $w(n)$  é uma janela retangular de tamanho  $N$  tal que:

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad 2$$

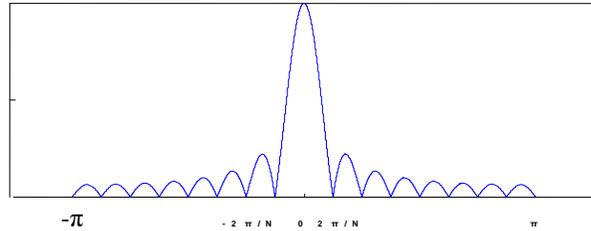
Assim, o segmento do sinal pode ser considerado como o produto do sinal real  $x(n)$  pela janela de dados  $w(n)$ . Esta janela não precisa necessariamente ser a retangular, pode ser uma diferente. Por enquanto vamos considerar a retangular.

A transformada de Fourier da janela retangular é dada por:

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\text{sen}(\omega N / 2)}{\text{sen}(\omega / 2)} e^{-j\omega(N-1)/2} \quad 3$$

Como no domínio do tempo discreto o segmento do sinal é o produto do sinal real pela janela, então a transformada de Fourier do sinal  $x_w(n)$  é a convolução entre as transformadas de  $x(n)$  e de  $w(n)$ , assim:

$$X_w(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \quad 4$$



**Figura 2:** Módulo da transformada de Fourier da janela retangular.

Assim, o espectro que observamos é a convolução entre o espectro do sinal real e o da janela de dados. No domínio da frequência a janela é composta de um lóbulo principal entre  $-2\pi/N$  e  $2\pi/N$  e lóbulos laterais de razoável amplitude entre  $|2\pi/N|$  e  $|\pi|$ . O lóbulo principal alisa (*smooths*) as variações rápidas do sinal, podendo suprimir picos estreitos que podem ocorrer em  $X(e^{j\omega})$ , enquanto que os lóbulos laterais podem introduzir falsos picos no espectro. O único modo de melhorar a estimativa é com o aumento no valor de  $N$ . Se  $N$  tende ao infinito o espectro da janela torna-se um impulso e o espectro calculado tende ao do sinal real. O problema principal da janela retangular é a transição abrupta nos extremos para  $N = 0$  e  $n = N$  que conduz a lóbulos laterais de amplitudes significativamente grandes.

Existem várias janelas com transições mais suaves do que a janela retangular e que podem ser utilizadas em análise espectral. A tabela 1 mostra algumas destas janelas. Como regra prática quando do uso de uma janela, ela deve conter de 2,5 a 3 períodos das componentes de frequências baixas do sinal. O uso de janelas ficará mais claro quando estudarmos o periodograma na seção (4).

**Tabela 1:** Janelas de dados.

Janela	Lóbulo lateral (dB)	Largura do lóbulo principal	Equação
Retangular	-13	$1.8\pi/(N-1)$	$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
Hanning	-32	$5.01\pi/(N-1)$	$w(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}\right), & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
Hamming	-43	$6.27\pi/(N-1)$	$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}\right), & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
Blackman	-57	$11 \pi/(N-1)$	$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

### 3. Estimação da função de autocorrelação

Seja  $x(n)$  um processo aleatório de tempo discreto. A sua função de autocorrelação é definida como:

$$\gamma_x(k) = E[x^*(n)x(n+k)] \quad 5$$

A função de autocorrelação é uma medida no tempo que está diretamente relacionada com as variações do sinal, assim ela contém informações sobre o conteúdo de frequências do processo aleatório. A densidade espectral de potência de  $x(n)$  é dada pela transformada de Fourier da função de autocorrelação, isto é,

$$\Gamma_x(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_x(k)e^{-jwk} \quad 6$$

Este resultado é conhecido como Teorema de Wiener-Khintchine.

Na prática encontramos dois problemas na determinação da função de autocorrelação e consequentemente da densidade espectral de potência.

Primeiro, temos disponível somente uma realização do processo aleatório, portanto, é necessária a suposição de ergodicidade do processo. Para processos ergódicos, uma única função amostra representa todo o processo aleatório, e a função de autocorrelação pode ser calculada pela seguinte média temporal,

$$r_x(k) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x^*(n)x(n+k) \quad 7$$

O segundo problema que encontramos é que se tem disponível um trecho finito do sinal. Neste caso o limite na equação (7) não se aplica. Fazemos então uma aproximação, isto é, calculamos as estimativas da função de autocorrelação e da densidade espectral de potência. Para a densidade espectral de potência esta estimativa é conhecida como periodograma, como será estudado na seção seguinte. Para a função de autocorrelação têm-se dois tipos de estimativas: a estimativa não polarizada, e a polarizada.

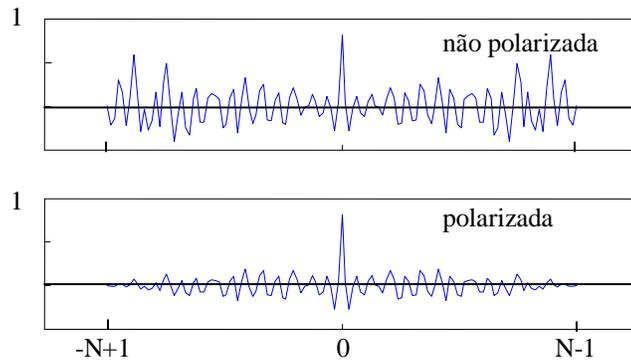
Para um sinal estacionário, a estimativa **não polarizada** na função de autocorrelação  $r_x(n)$  é feita através da seguinte equação:

$$\hat{r}_x(k) = \begin{cases} \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} x^*(n)x(n+k), & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ \hat{r}_x^*(-k), & k = -1, -2, \dots, -N+1 \end{cases} \quad 8$$

E a estimativa **polarizada** da função de autocorrelação é dada por:

$$\hat{r}_x(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} x^*(n)x(n+k), & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ \hat{r}_x^*(-k), & k = -1, -2, \dots, -N+1 \end{cases} \quad 9$$

Observe que os dois estimadores são muito parecidos, a diferença está no uso do fator de ponderação  $N-k$  ou  $N$ . A equação (8) fornece uma estimativa consistente da função de autocorrelação, porém, na prática a equação (9) é preferível, como mostra o exemplo da figura 3 para um ruído branco gaussiano. A função de autocorrelação teórica para o ruído branco é  $r_x(k) = \sigma_x^2 \delta(k)$ , isto é, um impulso na origem. Observe na figura (3) que a estimativa polarizada fornece uma aproximação melhor.



**Figura 3:** Estimativa da função de autocorrelação de um ruído branco.

Para valores de  $|k|$  próximos de  $N$  a estimativa não polarizada da função de autocorrelação apresenta flutuações muito grandes, assim esta estimativa não é confiável desde que poucos produtos  $x^*(n)x(n+k)$  são utilizados no cálculo da média (somatória). Uma boa regra prática (Manolakis, 2005) é utilizar  $N > 50$  e  $|k| < N/4$ . Observe que a estimativa polarizada da função de autocorrelação do ruído branco, que é um impulso na origem, é mais próxima do valor real, mesmo para atrasos  $|k|$  próximos de  $N$ . Neste caso a variância é menor que a não polarizada, a razão é que a divisão pelo valor  $N$ , constante, diminui as oscilações para grandes atrasos  $k$ . Portanto é preferível utilizar na estimativa a equação (9).

Para determinar a qualidade estatística do estimador da equação (9) temos que considerar o valor médio e a variância de  $\hat{r}_x(k)$ .

Pode-se mostrar que o valor médio de  $\hat{r}_x(k)$  calculado pela equação(9) é dado por:

$$E[\hat{r}_x(k)] = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) w(k) r_x(k) \quad 10$$

em que  $w(n)$  é a janela retangular.

A equação (10) nos mostra que o estimador da função de autocorrelação da equação (9) é um estimador polarizado de  $r_x(k)$ , pois o valor esperado não é igual ao valor verdadeiro. Contudo ele é assintoticamente não polarizado se  $N \rightarrow \infty$ , pois neste caso,  $E[\hat{r}_x(k)] \rightarrow r_x(k)$ . Assim, seguindo as recomendações anteriores de  $|k| \leq L$  tal que  $L \ll N$ , a polarização é pequena e o valor esperado é praticamente igual ao verdadeiro.

Pode-se também mostrar que a variância de  $\hat{r}_x(k)$  é dada por

$$\text{var}[\hat{r}_x(k)] \approx \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [r_x^2(l) + r_x(l+k)r_x(l-k)] \quad 11$$

Observe que a variância do estimador tende a zero se  $N \rightarrow \infty$ . Assim,  $\hat{r}_x(k)$  é uma boa estimativa de  $r_x(k)$  se o atraso  $|k|$  é muito menor do que  $N$ , caso contrário a estimativa é ruim e não saberíamos dizer se as flutuações na função de autocorrelação são reais ou aleatórias.

#### 4. Períodograma

Admitindo que a função de autocorrelação seja absolutamente somável, a densidade espectral de potência é um processo aleatório estacionário com valor médio zero definida como:

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k)e^{-j\omega k} \quad 12$$

Um outro modo de definir a densidade espectral de potência a partir da sequência  $x(n)$  é mostrado abaixo:

$$P_x(e^{j\omega}) = \lim_{M \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{2M+1} \left| \sum_{n=-M}^M x(n)e^{-j\omega n} \right|^2 \right] \quad 13$$

Vamos tratar nesta seção da estimação do espectro acima admitindo que temos disponível uma simples realização de um processo estacionário com tamanho finito  $N$ .

Retirando o operador esperança “E”, pois temos somente uma realização do processo, e utilizando os dados disponíveis  $\{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$ , então a equação (13) pode ser reescrita como:

$$\hat{P}_x(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \right|^2 = \frac{1}{N} |X_w(e^{j\omega})|^2 \quad 14$$

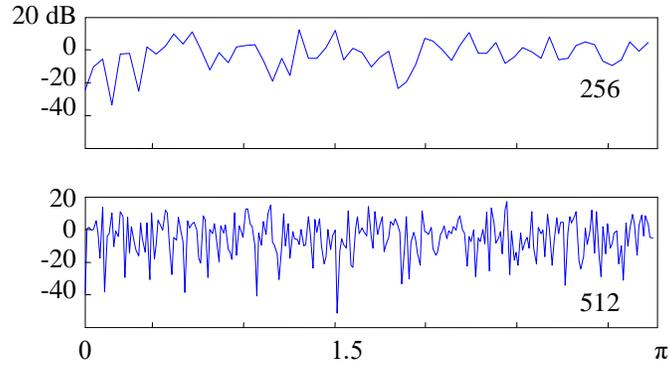
Este resultado é conhecido como periodograma. Uma observação importante é que utilizando a equação (14) não há necessidade de se estimar a função de autocorrelação, isto é, a densidade espectral de potência é estimada diretamente a partir da transformada de Fourier do sinal. Em geral o termo periodograma é utilizado quando a janela de dados é a retangular, quando ela é diferente utiliza-se o termo periodograma modificado.

Para as frequências discretas  $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$  utilizamos a transformada discreta de Fourier, e o periodograma será dado então por:

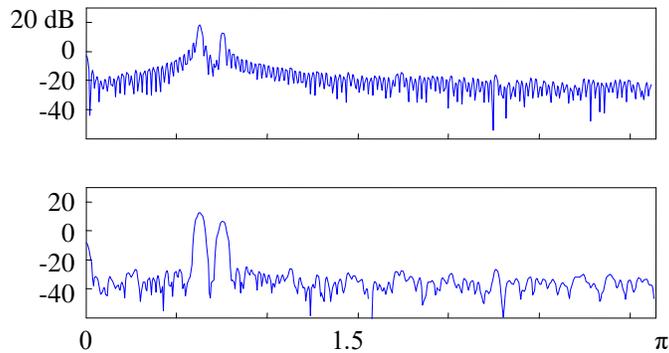
$$\hat{P}_x(k) = \hat{P}_x(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \frac{1}{N} |X_w(k)|^2, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad 15$$

em que  $X_w(k)$  é a transformada discreta de Fourier de  $N$  pontos da sequência  $x(n)$  multiplicada por uma janela de dados  $w(n)$ .

A figura 4 mostra o periodograma de uma sequência de ruído branco utilizando 256 e 512 amostras da sequência. Teoricamente, o resultado deveria apresentar um espectro densidade de potência plano em 0 dB, porém observamos grandes flutuações aleatórias. Assim, o periodograma é inconsistente; se aumentarmos o valor de  $N$  a polarização tende a zero, isto é, na média o espectro flutua em torno de 0 dB, mas a variância permanece alta, com grandes flutuações no espectro.



**Figura 4:** Periodograma do ruído branco.



**Figura 5:** Periodograma de um sinal com duas senóides com ruído.

Nos casos onde os dados consistem de sinais senoidais ou sinais de faixa estreita em ruído branco, muitas vezes é vantajoso aplicar uma janela diferente da retangular ao sinal antes de se aplicar o periodograma. Com a janela retangular um sinal de nível baixo pode ser mascarado pelos lóbulos laterais da janela. Utilizando uma janela diferente devemos tolerar um aumento na largura de faixa dos lóbulos principais. A figura 5 mostra o periodograma de um sinal composto por duas senóides de frequências  $0.2\pi$  e  $0.24\pi$  contaminado com uma sequência de ruído branco. A figura 5.a mostra o periodograma utilizando janela retangular e na figura 4.b foi utilizada uma janela de Hamming. Observe que apesar da largura dos lóbulos ter aumentado, as flutuações diminuíram e os picos espectrais correspondentes às senóides se tornaram mais salientes.

Matematicamente a variância de um periodograma em qualquer frequência pode ser aproximada por:

$$\text{var}[\hat{P}_x(e^{jw})] = P_x^2(e^{jw}) \left\{ 1 + \left( \frac{\text{sen}(wN)}{N\text{sen}(w)} \right)^2 \right\} \quad 16$$

Para frequências que não sejam próximas de  $w = 0$  ou  $w = \pm\pi$  a expressão acima se reduz a:

$$\text{var}[\hat{P}_x(e^{jw})] \approx P_x^2(e^{jw}) \quad 17$$

A expressão acima é constante e não decai com o aumento de  $N$ . Assim podemos concluir que o periodograma não é confiável, pois a sua variância é muito grande, apresentando grandes flutuações espectrais. Em sua forma básica o periodograma é um estimador pobre da densidade espectral de potência,

pois a variância é alta. Assim, devemos reduzir a variância para se obter um estimador melhor, como será visto nas próximas seções.

## 5. Periodograma médio

A razão pela qual a variância do periodograma não diminui com o aumento do tamanho do registro de dados é atribuída à retirada da operação do valor médio da equação (13). Para melhorar as propriedades estatísticas da estimativa utilizamos o periodograma médio.

Admitindo que são disponíveis  $M$  registros independentes dos dados, todos do mesmo processo aleatório  $\{x_0(n), x_1(n), \dots, x_{M-1}(n)\}$  e todos no mesmo intervalo  $0 \leq n \leq L-1$ . O periodograma médio é definido como:

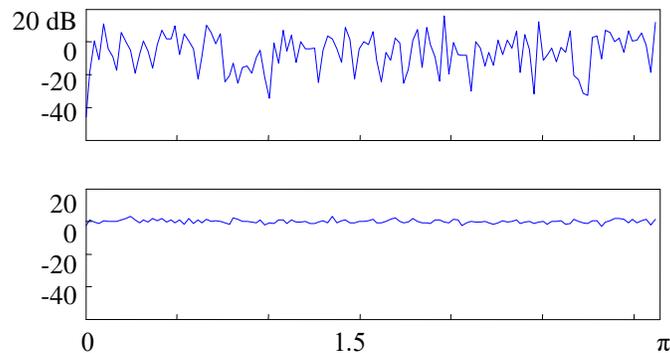
$$\hat{P}_x^M(e^{jw}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \hat{P}_x^l(e^{jw}) \quad 17$$

em que  $\hat{P}_x^l(e^{jw}) = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_l(n) e^{-jwn} \right|^2$  da  $l$ -ésima realização.

A variância deste estimador é diminuída pelo fator  $M$  em relação ao periodograma, pois desde que os registros de dados são independentes então os periodogramas individuais também o são, assim,

$$\text{var}[\hat{P}_x^M(e^{jw})] = \frac{1}{M} \text{var}[\hat{P}_x^l(e^{jw})] \quad \forall l \quad 18$$

A figura 6 mostra o períodograma para somente um registro de dados e o periodograma médio para um ruído branco gaussiano com variância 1,  $L = 256$  e  $M = 50$  registros. Observe que a variância do periodograma médio diminuiu acentuadamente, aproximando a estimativa do espectro verdadeiro.



**Figura 6:** Periodograma e periodograma médio.

Na prática, em vez de  $M$  registros, normalmente temos disponível um único registro de dados de tamanho  $N$ . Neste caso, se o valor de  $N$  é suficientemente grande, dividimos os dados em  $M$  blocos não superpostos de tamanho  $L$ , tal que  $N = ML$  e utilizamos os seguintes conjunto de dados para determinar cada periodograma:

Para sinais diferentes do ruído branco os blocos adjacentes não são decorrelacionados e a redução na variância será menor do que  $M$ . O valor de  $L$  deve ser escolhido de tal modo que a largura de banda do lóbulo principal ( que é próxima de  $1/L$ ) seja menor (pelo menos duas vezes) a largura de banda do pico mais estreito de  $\text{var} P_x(e^{jw})$ .

## 6. Estimador de Blackman-Tukey

A estimativa da densidade espectral de potência, tal como definida pela equação (14) pode ser recolocada na seguinte forma:

$$\hat{P}_x(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_x(k) e^{-j2\pi f k} \quad 20$$

em que  $\hat{r}_x(k)$  é a estimativa polarizada da função de autocorrelação, calculada através da equação (9).

Como foi visto, este estimador apresenta um desempenho muito pobre devido à estimativa pobre da função de autocorrelação, principalmente para grandes atrasos. Uma maneira de se evitar este problema é multiplicar a estimativa da função de autocorrelação por uma janela de dados. Este tipo de estimador da densidade espectral de potência é chamada de estimador de Blackman-Tukey e é definido como abaixo:

$$\hat{P}_x(f) = \sum_{k=-M}^M \hat{r}_x(k) w(k) e^{-j2\pi f k} \quad 21$$

em que  $w(k)$  é uma janela de dados de tamanho  $2M-1$  e simétrica em torno de  $k = 0$ .

A janela reduz a variância do estimador espectral, mas aumenta a polarização. Cuidado deve ser tomado na escolha da janela para não resultar em estimação espectral negativa, Manolakis (2005) recomenda o uso da janela de Bartlett ou de Parzen.

A figura 7 mostra o periodograma e o método de Blackman-Tukey para uma realização de um sinal composto por três senóides de frequências  $0.2\pi$ ,  $0.24\pi$  e  $0.48\pi$  contaminado com uma sequência de ruído branco. A figura 7.a mostra o periodograma utilizando janela retangular e na figura 7.b foi utilizado o método de Blackman-Tukey com janela de Bartlett. Observe novamente que as flutuações diminuíram, os lóbulos correspondentes se tornaram mais salientes, mas a largura de banda aumentou.

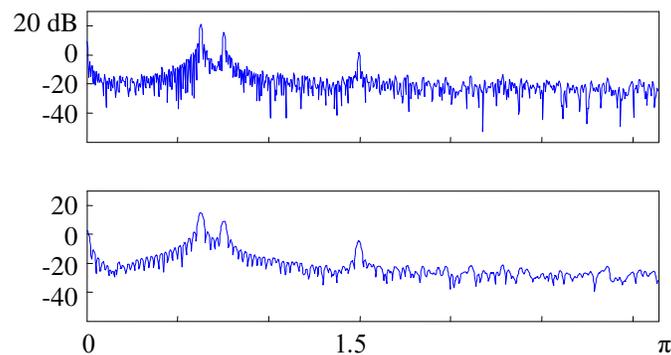


Figura 7: Periodograma e método de Blackman-Tukey.

## 7. Método de Welch

Quando estudamos o periodograma vimos que para reduzir a variância poderíamos fazer a média, se tivéssemos disponíveis  $M$  realizações diferentes de um sinal aleatório estacionário. Na maioria das aplicações práticas temos disponível somente uma única realização do processo aleatório, porém, se a sequência disponível é estacionária e apresenta um tamanho relativamente grande, podemos utilizar o método de Welch para estimar a densidade espectral de potência.

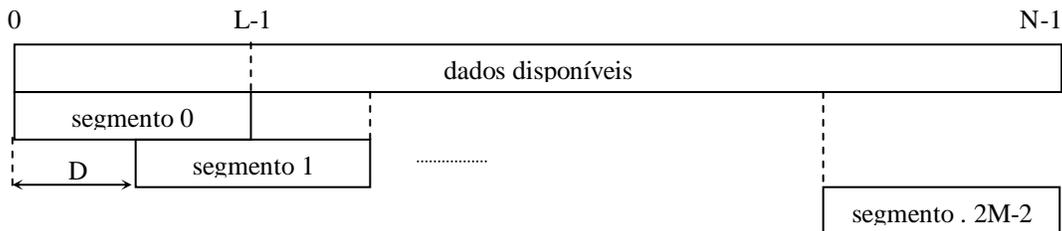
O método de Welch faz duas modificações no periodograma médio: os segmentos são permitidos se superporem e utiliza janelas diferentes da retangular. Neste método subdividimos o arquivo existente  $\{x(n), 0 \leq n < N\}$  em segmentos menores, superpostos, e a densidade espectral de potência é calculada em três etapas como segue:

- i. O sinal é segmentado de tal forma que os segmentos são permitidos ter uma superposição de  $D$  amostras (em geral 50% do tamanho dos segmentos), isto é, dividimos o sinal em segmentos menores de tamanho  $L$  de modo que:

$$x_i(n) = x(n + iD) \quad 22$$

em que:  $D = \frac{L}{2}$ ,  $n = 0, 1, \dots, L-1$ ,  $M = \frac{N}{L}$  e  $N$  é o tamanho do sinal

Observe que para uma superposição de 50%,  $D = L/2$  e assim temos  $2M - 1$  segmentos de tamanho  $L$ . Observe também que para  $D = L$  os segmentos são adjacentes. O valor  $D = L$  é estabelecido quando a janela utilizada é a retangular, neste caso o método de Welch se reduz ao periodograma médio. Para uma janela diferente da retangular a figura 8 ilustra a segmentação do sinal disponível.



**Figura 8:** Segmentação do sinal.

- ii. Cada segmento “ $i$ ” é multiplicado por uma janela  $w(n)$ , diferente da retangular, e em seguida calculamos o periodograma:

$$\hat{P}_{xx}^i(w_k) = \frac{1}{UL} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_i(n) w(n) e^{-jw_k n} \right|^2 \quad 23$$

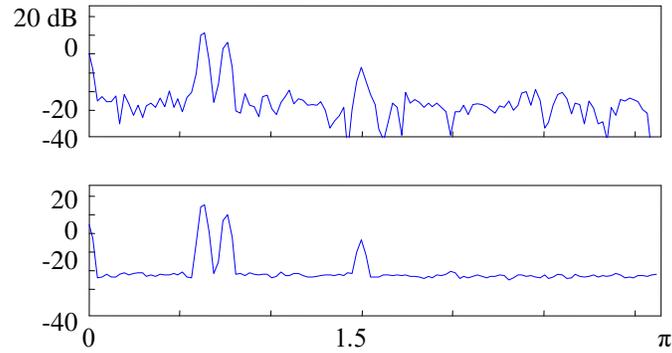
em que:  $w_k = \frac{2\pi k}{L}$ ,  $k = 0, 1, \dots, L-1$  e  $U$  é um fator de normalização de energia por causa do uso da janela

tal que  $U = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} w^2(n)$

- iii. Finalizando, calculamos o periodograma médio tal que:

$$\hat{P}_{xx}(w_k) = \frac{1}{2M-1} \sum_{i=0}^{2M-2} \hat{P}_{xx}^i(w_k) \quad 24$$

A figura 9 mostra o periodograma para um segmento e o método de Welch para uma realização de um sinal composto por três senóides de frequências  $0.2\pi$ ,  $0.24\pi$  e  $0.48\pi$  contaminado com uma sequência de ruído branco. A figura 9.a mostra o periodograma para um segmento e na figura 9.b foi utilizado o método de Welch com janela de Hamming. Note que no primeiro caso as flutuações na densidade espectral de potência mascaram a componente de frequência em  $0.48\pi$  rad/amostra, e no método de Welch esta componente é prontamente observável, note também que as flutuações espectrais diminuíram, os lóbulos correspondentes se tornaram mais salientes facilitando a análise.



**Figura 9:** Método de Welch.

## 8. Algumas orientações práticas

Quando o conjunto de dados é pequeno e a resolução de frequências é baixa podemos melhorar a visualização gráfica da densidade espectral de potências aumentando o número de dados que entra no cálculo da FFT. Neste acrescenta-se zeros ao sinal antes de calcular o periodograma, isto é, formamos um novo sinal  $x'(n)$  tal que:

$$x'(n) = \begin{cases} x(n), & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & n = N, N+1, \dots, M-1 \end{cases} \quad 25$$

O acréscimo no número de zeros deve ser feito após passar o sinal por uma janela, e em seguida calcula-se o periodograma:

$$\hat{P}_x(f_k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x'(n) e^{-j2\pi f_k n} \right|^2 \quad 26$$

em que:  $f_k = \frac{k}{L}$  e  $k = 0, 1, \dots, M-1$

É importante lembrar que o acréscimo de zeros não melhora a resolução de frequência do periodograma, mas somente a visualização gráfica.