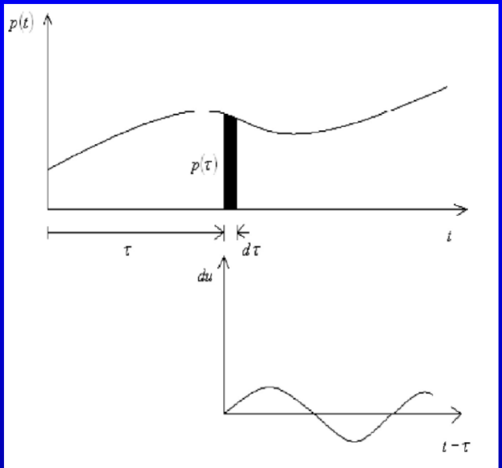
PEF-5916
Dinâmica e Estabilidade das Estruturas

Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli

Resposta a carregamento dinâmico geral

Análise no domínio do tempo: integral de Duhamel



$$du\left(t\right)=\frac{p\left(\tau\right)d\tau}{m\omega_D}e^{-\xi\omega\left(t-\tau\right)}\,\text{sen}\,\omega_D\left(t-\tau\right),\ t>\tau$$

$$u\left(t\right)=e^{-\xi\omega t}\left[\left(\frac{\dot{u}_0+u_0\xi\omega}{\omega_D}\right)\text{sen}\omega_D t+u_0\cos\omega_D t\right]+\int_0^t\frac{p\left(\tau\right)}{m\omega_D}e^{-\xi\omega\left(t-\tau\right)}\,\text{sen}\,\omega_D\left(t-\tau\right)d\tau$$

Solução em regime permanente:

$$u\left(t\right)=\int_0^t p\left(\tau\right)h\left(t-\tau\right)d\tau$$

com

$$h\left(t\right)=\frac{1}{m\omega_D}e^{-\xi\omega t}\,\text{sen}\,\omega_D t$$

ou

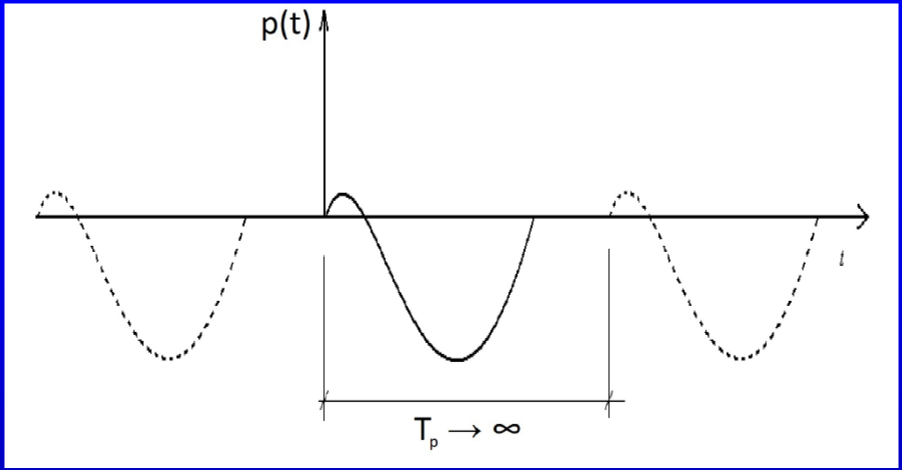
$$u\left(t\right)\ =\ A\left(t\right)\text{sen}\,\omega_D t-B\left(t\right)\cos\omega_D t$$

com

$$\begin{aligned}A(t)&=\frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p\left(\tau\right)e^{-\xi\omega\left(t-\tau\right)}\cos\omega_D\tau d\tau\\B(t)&=\frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p\left(\tau\right)e^{-\xi\omega\left(t-\tau\right)}\,\text{sen}\,\omega_D\tau d\tau\end{aligned}$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Análise no domínio da frequência: transformadas de Fourier



$$P\left(\overline{\omega}_n\right) = T_p P_n$$

$$T_p \longrightarrow \infty \Rightarrow \overline{\omega} = \frac{2\pi}{T_p} \rightarrow d\overline{\omega} \Rightarrow \frac{1}{T_p} \rightarrow \frac{d\overline{\omega}}{2\pi}$$

$$p\left(t\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{i\overline{\omega}_n t} \Rightarrow p\left(t\right) = \lim_{T_p\rightarrow\infty} \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(T_p P_n\right) \exp\left(i\overline{\omega}_n t\right) = \lim_{T_p\rightarrow\infty} \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\left(\overline{\omega}_n\right) \exp\left(i\overline{\omega}_n t\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\overline{\omega}\right) \exp\left(i\overline{\omega} t\right) d\overline{\omega}$$

$$P_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p\left(t\right) e^{-i\overline{\omega}_n t} dt \Rightarrow P\left(\overline{\omega}\right) = \lim_{T_p\rightarrow\infty} \left(T_p P_n\right) = \lim_{T_p\rightarrow\infty} \int_0^{T_p} p\left(t\right) \exp\left(-i\overline{\omega}_n t\right) dt = \lim_{T_p\rightarrow\infty} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} p\left(t\right) \exp\left(-i\overline{\omega}_n t\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} p\left(t\right) \exp\left(-i\overline{\omega} t\right) dt$$

$$u\left(t\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n H\left(\overline{\omega}_n\right) e^{i\overline{\omega}_n t} \Rightarrow u\left(t\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\overline{\omega}\right) H\left(\overline{\omega}\right) \exp\left(i\overline{\omega} t\right) d\overline{\omega}$$

e

$$h\left(t\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H\left(\overline{\omega}\right) e^{i\overline{\omega} t} d\overline{\omega}$$

$$H\left(\overline{\omega}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} h\left(t\right) e^{-i\overline{\omega} t} dt$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração no domínio da frequência

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 sen\Omega t$$

Transformada de Fourier do carregamento $P(\bar{\omega}) = -p_0 \pi i \left[\delta(\bar{\omega} - \Omega) - \delta(\bar{\omega} + \Omega)\right]$

$\delta(x)$ é a função delta de Dirac

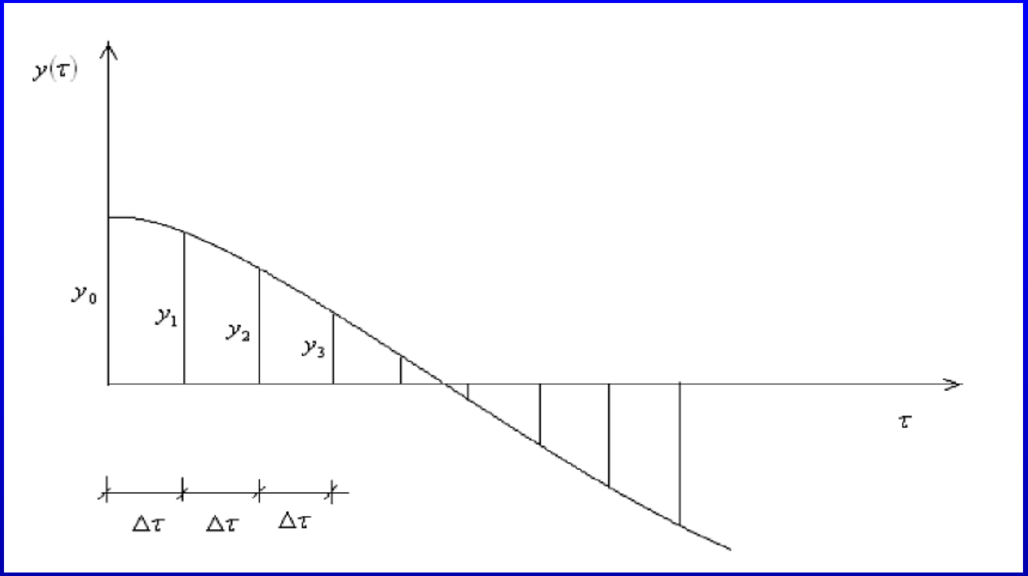
$$\delta(0) \to +\infty,$$
$$\delta(x) = 0 \text{ para } x \neq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

$$H(\bar{\omega}) = \frac{\left(1 - \bar{\beta}^2\right)\bar{D}^2}{k} - \frac{2\bar{\beta}\xi\bar{D}^2}{k} i \qquad \bar{\beta} = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \qquad \bar{D} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \bar{\beta}^2\right)^2 + \left(2\xi\bar{\beta}\right)^2}}$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{p_0}{2} i \left[\frac{\left(1 - \beta^2\right)}{k} D^2 \left(e^{-i\Omega t} - e^{i\Omega t}\right) + \frac{2\xi\beta}{k} D^2 i \left(e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}\right)\right] = \frac{p_0}{k} D^2 i \left[-i\left(1 - \beta^2\right) sen\Omega t + i\left(2\xi\beta\right) cos\Omega t\right] \\ &= \frac{p_0}{k} D^2 \left[\left(1 - \beta^2\right) sen\Omega t - \left(2\xi\beta\right) cos\Omega t\right] \end{aligned}$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de Duhamel



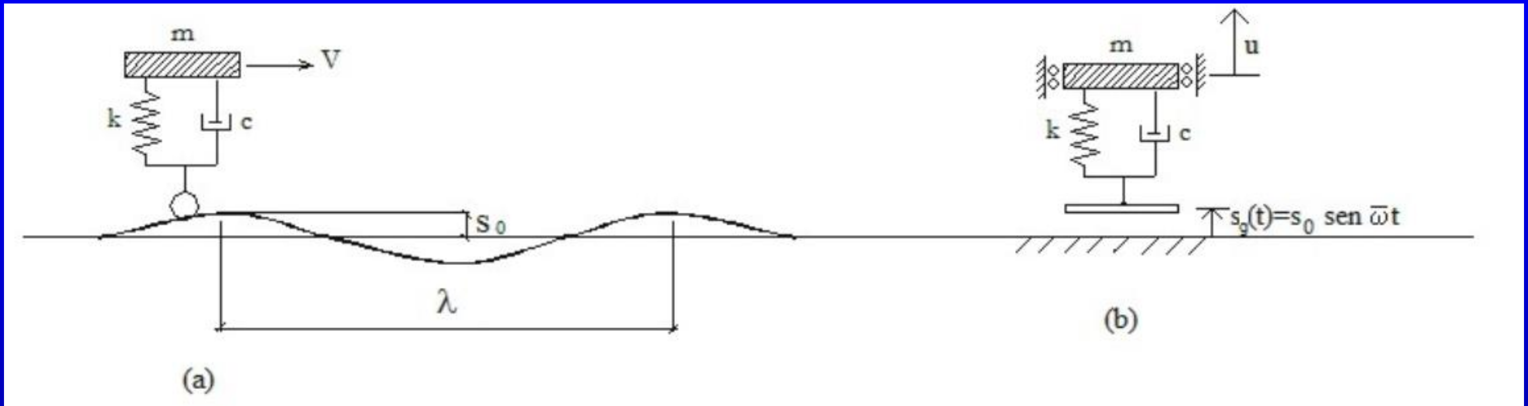
somatório simples [1]	$\int_0^t y(\tau)\, d\tau = \Delta\tau\,(y_0 + y_1 + \ldots.. + y_{N-1})$
trapezoidal [2]	$\int_0^t y(\tau)\, d\tau = \frac{\Delta\tau}{2}\,(y_0 + 2y_1 + \ldots.. + 2y_{N-1} + y_N)$
Simpson [3]	$\int_0^t y(\tau)\, d\tau = \frac{\Delta\tau}{3}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots.. + 4y_{N-1} + y_N)$

$N = \frac{t}{\Delta\tau}$ para se aplicar a regra de Simpson,

escolher $\Delta\tau$ de tal sorte que N resulte um número par

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de Duhamel pela regra de Simpson



$m = 1200\,kg,\ c = 10450\,Ns/m$ e $k = 148650\,N/m$

$p(t) = p_0 \operatorname{sen} \bar{\omega} t$, com $\bar{\omega} = 10,472\,rad/s,\ s_0 = 0,03\,m$ e $p_0 = m\bar{\omega}^2 s_0 = 3948N$

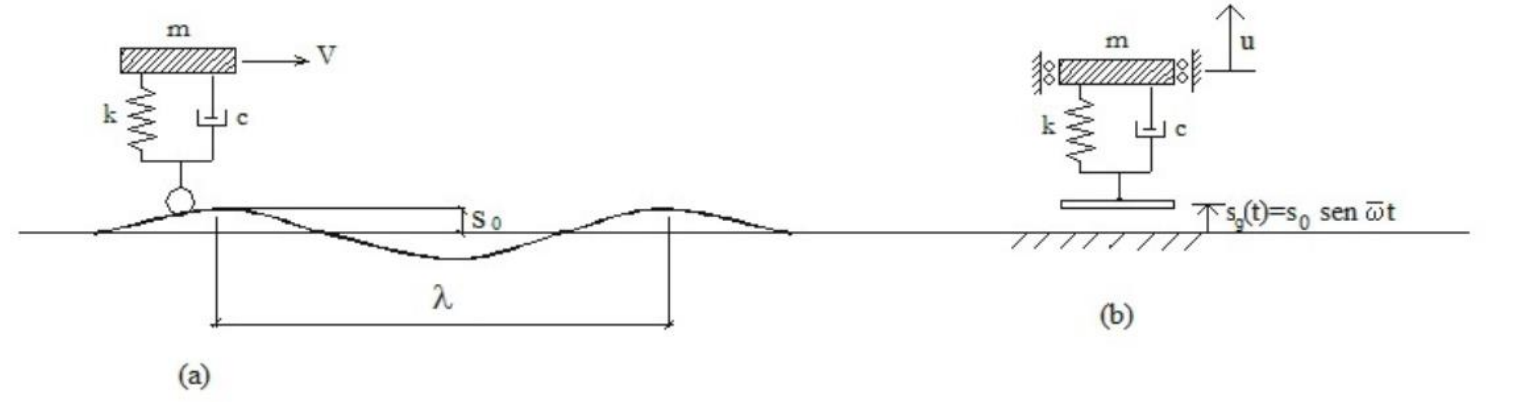
para o veículo trafegando com velocidade $72\,km/h$ ou ($20\,m/s$)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 11,130 rad/s$$
$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = 0,391$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 10,241 rad/s$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de Duhamel pela regra de Simpson



$m = 1200\,kg,\ c = 10450\,Ns/m$ e $k = 148650\,N/m$

$p(t) = p_0 \operatorname{sen} \bar{\omega}t$, com $\bar{\omega} = 10,472\,rad/s,\ s_0 = 0,03\,m$ e $p_0 = m\bar{\omega}^2 s_0 = 3948N$

para o veículo trafegando com velocidade $72\,km/h$ ou ($20\,m/s$)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 11,130 rad/s$$
$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = 0,391$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 10,241 rad/s$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de Duhamel pela regra de Simpson

$$u(t) = A(t)\,\operatorname{sen}\omega_D t - B(t)\,\cos\omega_D t$$

$$A(t) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\cos\omega_D\tau\,d\tau$$

$$B(t) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\operatorname{sen}\omega_D\tau\,d\tau$$

$$\int_0^t y(\tau)\,d\tau = \frac{\Delta\tau}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots.. + 4y_{N-1} + y_N\right)$$

$t_i\,(s)$	A_i	B_i	$u_i\,(m)$
$1,46$	0,0059	0,0416	0,0344
$1,48$	0,0040	0,0392	0,0356
$1,50$	0,0031	0,0363	0,0352

$\Delta\tau = 0,01\,s$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Runge Kutta de 4ª. ordem

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= \dot{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(y) = y, \\ \dot{y} &= g(x, y, t) = \frac{1}{m}\left[p(t) - cy - kx\right] \end{aligned}$$

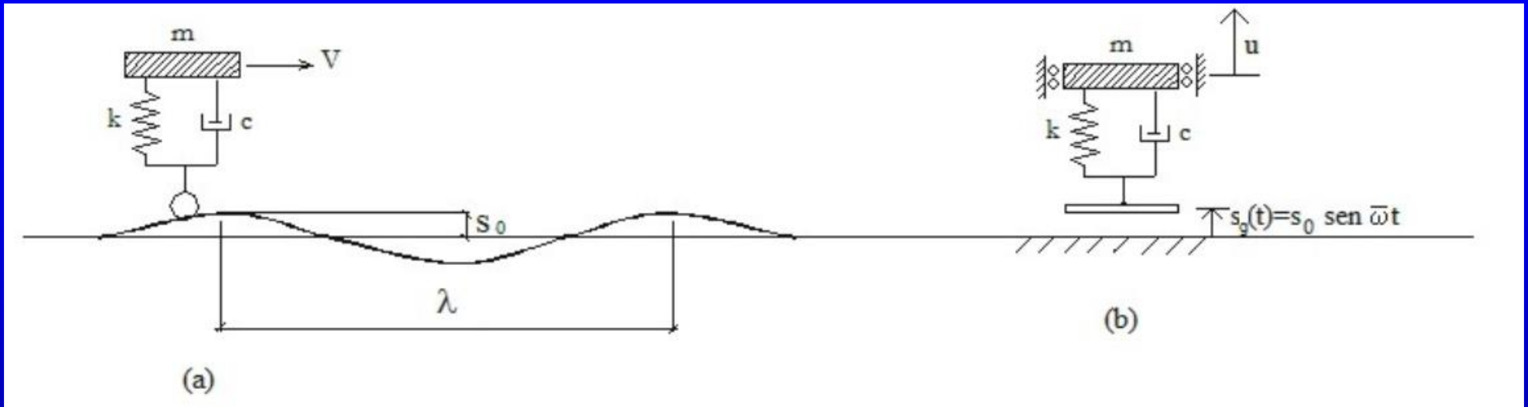
$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{\Delta t}{6}\left(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{\Delta t}{6}\left(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4\right) \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} f_1 = f(y_i), \\ f_2 = f\left(y_i + \frac{\Delta t}{2} g_1\right), \\ f_3 = f\left(y_i + \frac{\Delta t}{2} g_2\right), \\ f_4 = f\left(y_i + \Delta t g_3\right), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} g_1 = g(x_i, y_i, t_i) \\ g_2 = g\left[\left(x_i + \frac{\Delta t}{2} f_1\right), \left(y_i + \frac{\Delta t}{2} g_1\right), \left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)\right] \\ g_3 = g\left[\left(x_i + \frac{\Delta t}{2} f_2\right), \left(y_i + \frac{\Delta t}{2} g_2\right), \left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)\right] \\ g_4 = g\left[\left(x_i + \Delta t f_3\right), \left(y_i + \Delta t g_3\right), \left(t_i + \Delta t\right)\right] \end{gathered}$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método de Runge-Kutta de 4ª. ordem



$m = 1200\,kg,\ c = 10450\,Ns/m$ e $k = 148650\,N/m$

$p(t) = p_0 \,\mathrm{sen}\, \bar{\omega} t$, com $\bar{\omega} = 10,472\,rad/s,\ s_0 = 0,03\,m$ e $p_0 = m\bar{\omega}^2 s_0 = 3948N$

para o veículo trafegando com velocidade $72\,km/h$ ou $(\,20\,m/s)$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 11,130 rad/\,s$$
$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = 0,391$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 10,241 rad/s$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método de Runge-Kutta de 4ª. ordem

$$1200\ddot{u} + 10450\dot{u} + 148650u = 3948\,\text{sen}\,(10,472t)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,565\,s$$

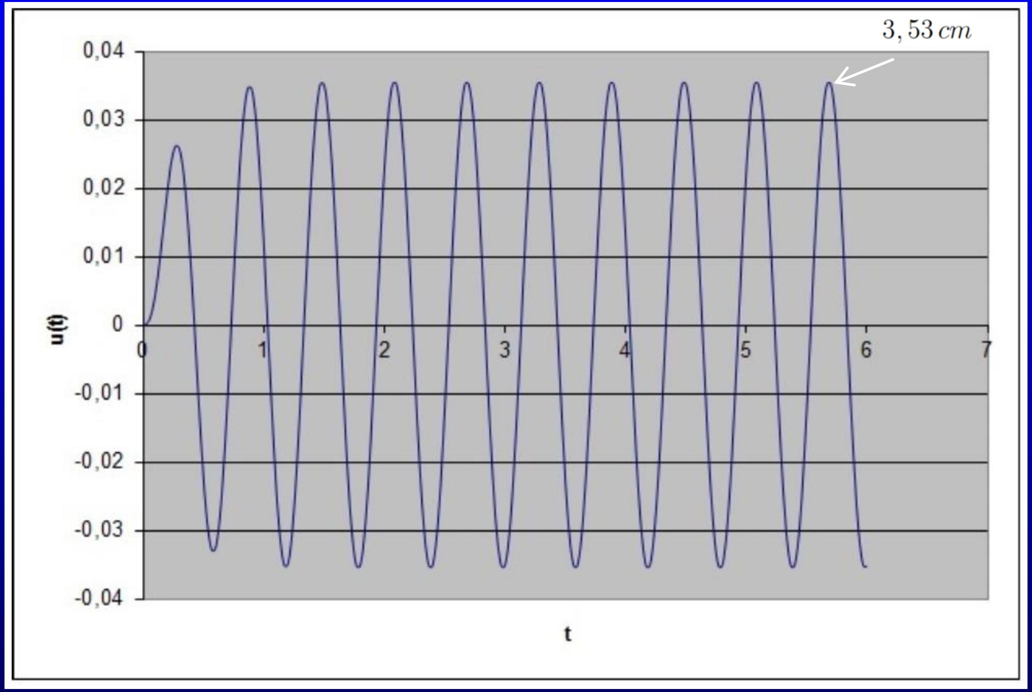
$$u_0 = 0 \text{ e } \dot{u}_0 = 0$$

$$\Delta t = 0,03\,s$$

$t_i\,(s)$	$0,00$	$0,03$	$0,06$	$0,09$	$0,12$	$0,15$	$0,18$	...
$x_i\,(m)$	0	0,000144321	0,001049014	0,003162713	0,006564745	0,010987206	0,015885663	...
$y_i\,(m/s)$	0	0,013976977	0,048828298	0,092510056	0,132774286	0,158991215	0,163545077	...
f_{1i}	0	0,013976977	0,048828298	0,092510056	0,132774286	0,158991215	0,163545077	...
g_{1i}	0	0,877118897	1,378805869	1,464545202	1,159879854	0,544788722	-0,262745521	...
f_{2i}	0	0,02713376	0,069510386	0,114478234	0,150172484	0,167163046	0,159603894	...
g_{2i}	0,172185698	1,21357898	1,500597232	1,371142824	0,882207076	0,137686822	-0,729925917	...
f_{3i}	0,000860928	0,032180661	0,071337256	0,113077198	0,146007392	0,161056517	0,152596188	...
g_{3i}	0,164691316	1,145196016	1,446260111	1,342514642	0,886132548	0,175658167	-0,661599805	...
f_{4i}	0,001646913	0,048332857	0,092216101	0,132785495	0,159358263	0,16426096	0,143697082	...
g_{4i}	0,328496472	1,375595347	1,463831022	1,160986003	0,546826604	-0,260706339	-1,124433387	...

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método de Runge-Kutta de 4ª. ordem



$$\Delta t = 0,03\,s$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Euler-Gauss

"método da aceleração média constante"

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{1}{2}\left(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}\right)\Delta t$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{1}{4}\left(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}\right)\Delta t^2$$

$$\Rightarrow$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2}\left(u_{i+1} - u_i\right) - \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_i - \ddot{u}_i$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_{i+1}$$

"equilíbrio dinâmico" no instante t_{i+1}

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1}$$

$$\hat{k}\, u_{i+1} = \hat{R}_{i+1}$$

$$\hat{k} = k + \frac{4}{\Delta t^2}m + \frac{2}{\Delta t}c$$

$$\hat{R}_{i+1} = p_{i+1} + m\left(\frac{4}{\Delta t^2}u_i + \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_i + \ddot{u}_i\right) + c\left(\frac{2}{\Delta t}u_i + \dot{u}_i\right)$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Euler-Gauss

Inicialização

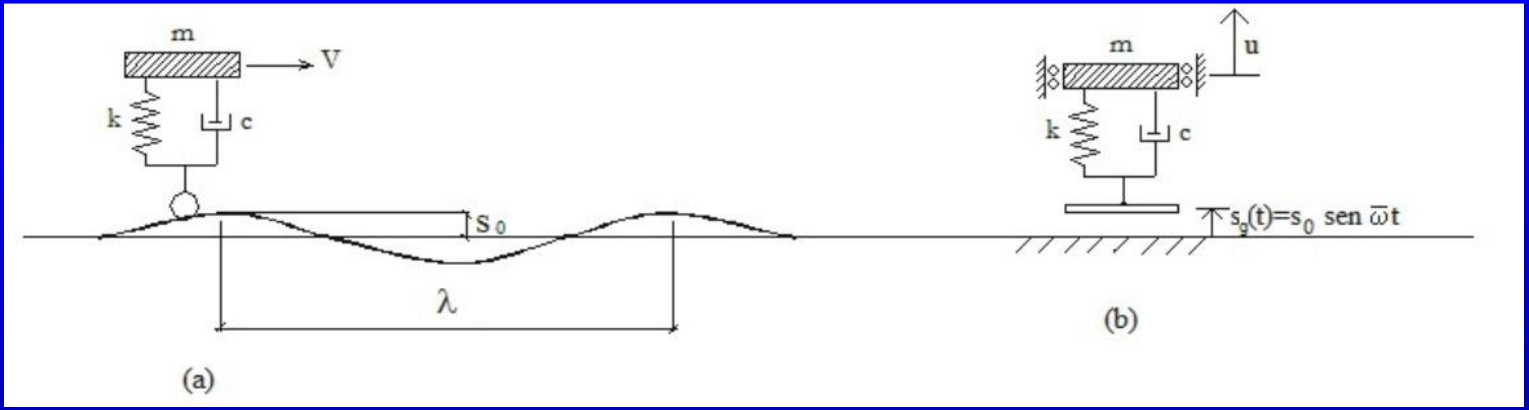
dados: $u_0,\ \dot{u}_0$ e $p_0 = p\,(0)$

determina-se: $$\ddot{u}_0 = \frac{p_0}{m} - \frac{k}{m}u_0 - \frac{c}{m}\dot{u}_0$$

Δt da ordem de $\frac{T^*}{20}$,
sendo T^* o mínimo entre o período natural do sistema e o menor período forçado relevante

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método de Euler-Gauss



$m = 1200\,kg,\ c = 10450\,Ns/m$ e $k = 148650\,N/m$

$p(t) = p_0 \,\text{sen}\,\bar{\omega}t$, com $\bar{\omega} = 10,472\,rad/s,\ s_0 = 0,03\,m$ e $p_0 = m\bar{\omega}^2 s_0 = 3948N$

para o veículo trafegando com velocidade $72\,km/h$ ou ($20\,m/s$)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 11,130 rad/s$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = 0,391$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 10,241 rad/s$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método de Euler-Gauss

$$1200\ddot{u} + 10450\dot{u} + 148650u = 3948\,\text{sen}\,(10,472t)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,565\,s$$

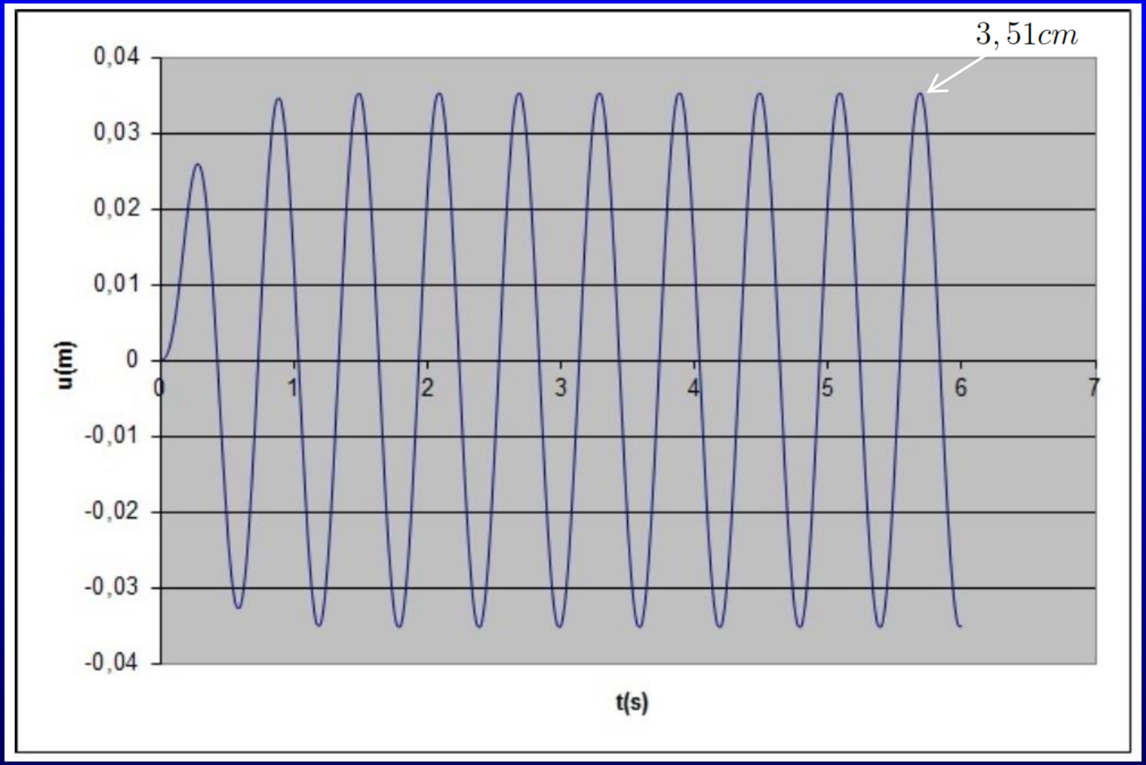
$$u_0 = 0 \text{ e } \dot{u}_0 = 0$$

$$\Delta t = 0,03\,s$$

$t_i\,(s)$	$u_i\,(m)$	$\dot{u}_i\,(m/s)$	$\ddot{u}_i\,(m/s^2)$	$\hat{k}\,(N/m)$	$\hat{R}_{i+1}\,(N)$
$0,00$	0	0	0	9267600	1830
$0,03$	0,000197462	0,013164162	0,877610782	9267600	10212
$0,06$	0,001101926	0,047133396	1,387004819	9267600	29305
$0,09$	0,003162053	0,090208409	1,484662754	9267600	99924
$0,12$	0,006470667	0,130365857	1,192500415	9267600	144363
$0,15$	0,010782037	0,157058793	0,58702867	9267600	186867
$0,18$	0,01557718	0,162617431	-0,2164528	9267600	220498
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método de Euler-Gauss



$$\Delta t = 0,03\ s$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Newmark

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + (1-\delta)\,\Delta t \ddot{u}_i + \delta \Delta t \ddot{u}_{i+1}$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \Delta t^2 \ddot{u}_i + \alpha \Delta t^2 \ddot{u}_{i+1}$$

$$\Rightarrow$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}\left(u_{i+1} - u_i\right) - \frac{1}{\alpha \Delta t}\dot{u}_i - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_i$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + (1-\delta)\,\Delta t \ddot{u}_i + \delta \Delta t \ddot{u}_{i+1}$$

"equilíbrio dinâmico" no instante t_{i+1}

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + k u_{i+1} = p_{i+1}$$

$$\hat{k}\, u_{i+1} = \hat{R}_{i+1}$$

$$\hat{k} = k + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} m + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} c$$

$$\hat{R}_{i+1} = p_{i+1} + m\left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} u_i + \frac{1}{\alpha \Delta t}\dot{u}_i + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_i\right] + c\left[\frac{\delta}{\alpha \Delta t} u_i + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1\right)\dot{u}_i + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right)\right.$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Newmark

Inicialização

dados: $u_0,\ \dot{u}_0$ e $p_0 = p(0)$

determina-se: $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0}{m} - \dfrac{k}{m}u_0 - \dfrac{c}{m}\dot{u}_0$

Δt da ordem de $\frac{T^*}{20}$,
sendo T^* o mínimo entre o período natural do sistema e o menor período forçado relevante

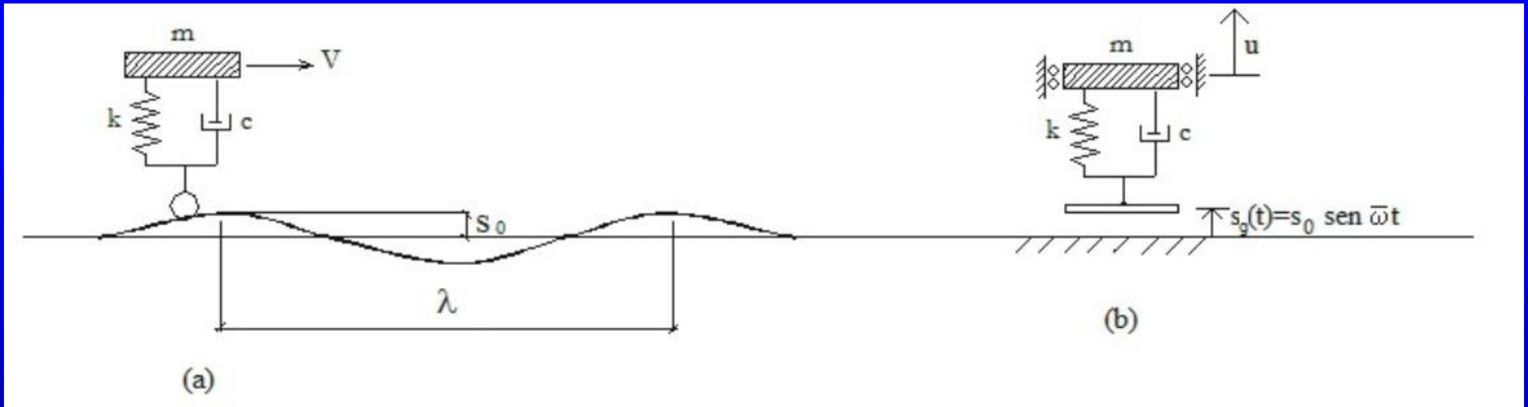
Estabilidade numérica incondicional (ENI) $\delta \geq \frac{1}{2}$ e $\alpha \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^2$

Método de Euler-Gauss (aceleração média constante) $\delta = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{1}{4}$ ⇨ ENI

Método da aceleração linear $\delta = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{1}{6}$ ⇨ ?

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método da aceleração linear



$m = 1200\,kg,\ c = 10450\,Ns/m$ e $k = 148650\,N/m$

$p(t) = p_0 \operatorname{sen}\bar{\omega}t$, com $\bar{\omega} = 10,472\,rad/s,\ s_0 = 0,03\,m$ e $p_0 = m\bar{\omega}^2 s_0 = 3948N$

para o veículo trafegando com velocidade $72\,km/h$ ou $(\ 20\,m/s)$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 11,130 rad/s$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = 0,391$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 10,241 rad/s$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método da aceleração linear

$$1200\ddot{u} + 10450\dot{u} + 148650u = 3948\,\text{sen}\,(10,472t)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,565\,s$$

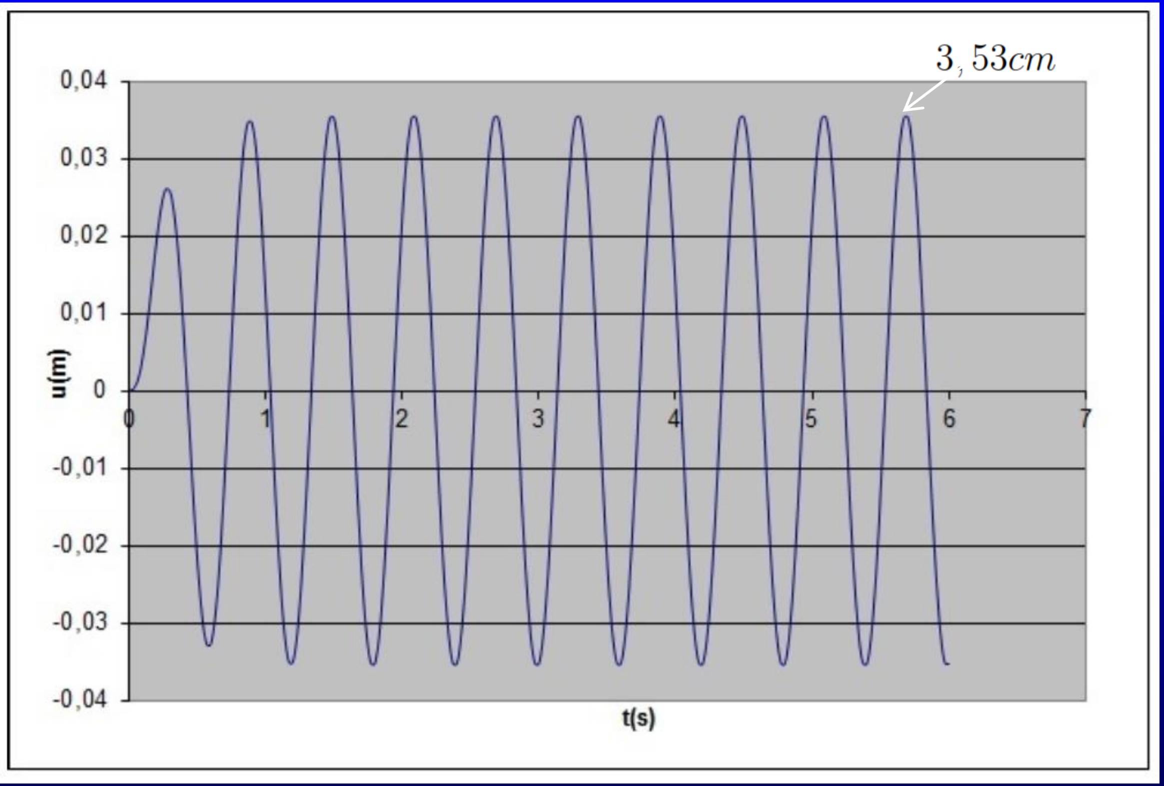
$$u_0 = 0 \text{ e } \dot{u}_0 = 0$$

$$\Delta t = 0,03\,s$$

$t_i\,(s)$	$u_i\,(m)$	$\dot{u}_i\,(m/s)$	$\ddot{u}_i\,(m/s^2)$	$\hat{k}\,(N/m)$	$\hat{R}_{i+1}\,(N)$
$0,00$	0	0	0	13789900	1830
$0,03$	0,000132706	0,013270602	0,884706816	13789900	13867
$0,06$	0,001005624	0,047479982	1,395918516	13789900	42368
$0,09$	0,003072417	0,090780565	1,490787025	13789900	88558
$0,12$	0,006421979	0,131033216	1,192723001	13789900	148901
$0,15$	0,010797812	0,157626099	0,58013585	13789900	216035
$0,18$	0,01566617	0,162881492	-0,229776268	13789900	280193
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Resposta a carregamento dinâmico geral

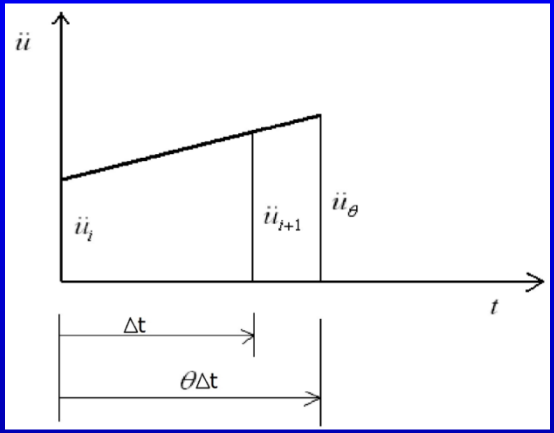
Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método da aceleração linear



$$\Delta t = 0,03\ s$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Wilson-θ



$$\ddot{u} = \ddot{u}_i + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{\theta \Delta t} t \;\Rightarrow\; \begin{aligned} \dot{u} &= \dot{u}_i + \ddot{u}_i t + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{2\theta \Delta t} t^2 \\ u &= u_i + \dot{u}_i t + \frac{\ddot{u}_i}{2} t^2 + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{6\theta \Delta t} t^3 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_\theta &= \dot{u}_i + \ddot{u}_i \theta \Delta t + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{2} \theta \Delta t \\ u_\theta &= u_i + \dot{u}_i \theta \Delta t + \frac{\ddot{u}_i}{2} (\theta \Delta t)^2 + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{6} (\theta \Delta t)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \ddot{u}_\theta &= \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} (u_\theta - u_i) - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{u}_i - 2\ddot{u}_i \\ \dot{u}_\theta &= \frac{3}{\theta \Delta t} (u_\theta - u_i) - 2\dot{u}_i - \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_i \end{aligned}\right.$$

"equilíbrio dinâmico" no instante $t = \theta \Delta t$

$$p_\theta = p_i + \theta (p_{i+1} - p_i)$$

$$m\ddot{u}_\theta + c\dot{u}_\theta + k u_\theta = p_\theta$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Integração numérica da equação de movimento pelo método de Wilson-θ

$$\hat{k}\, u_\theta = \hat{R}_\theta$$

$$\hat{k} = k + \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}m + \frac{3}{\theta\Delta t}c$$

$$\hat{R}_\theta = p_\theta + m\left[\frac{6}{(\theta\Delta t)^2}u_i + \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{u}_i + 2\ddot{u}_i\right] + c\left[\frac{3}{\theta\Delta t}u_i + 2\dot{u}_i + \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right]$$

$$\rightarrow u_\theta \rightarrow \ddot{u}_\theta \rightarrow \dot{u}_\theta$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{\theta}$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \ddot{u}_i\Delta t + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{2\theta}\Delta t$$

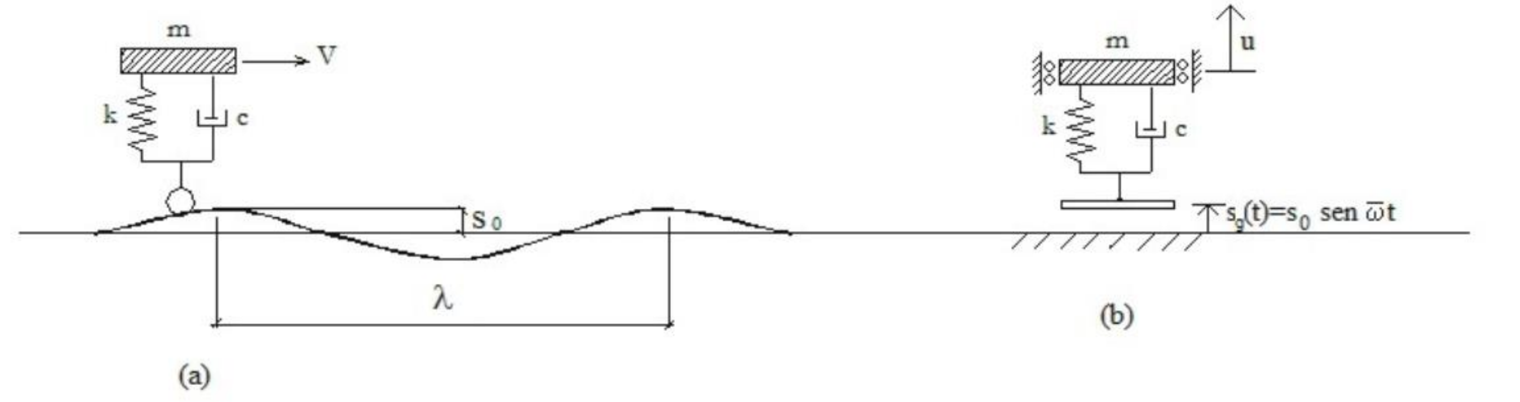
$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\Delta t + \frac{\ddot{u}_i}{2}\Delta t^2 + \frac{\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_i}{6\theta}\Delta t^2$$

Estabilidade numérica incondicional $\theta > 1,37$

Wilson-θ clássico $\theta = 1,40$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método de Wilson-θ



$m = 1200\,kg,\; c = 10450\,Ns/m$ e $k = 148650\,N/m$

$p(t) = p_0 \,\text{sen}\,\bar{\omega}t$, com $\bar{\omega} = 10,472\,rad/s,\; s_0 = 0,03\,m$ e $p_0 = m\bar{\omega}^2 s_0 = 3948N$

para o veículo trafegando com velocidade $72\,km/h$ ou ($20\,m/s$)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 11,130 rad/s$$
$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = 0,391$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 10,241 rad/s$$

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método de Wilson-θ

$$1200\ddot{u} + 10450\dot{u} + 148650u = 3948\,\text{sen}\,(10,472t)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,565\,s$$

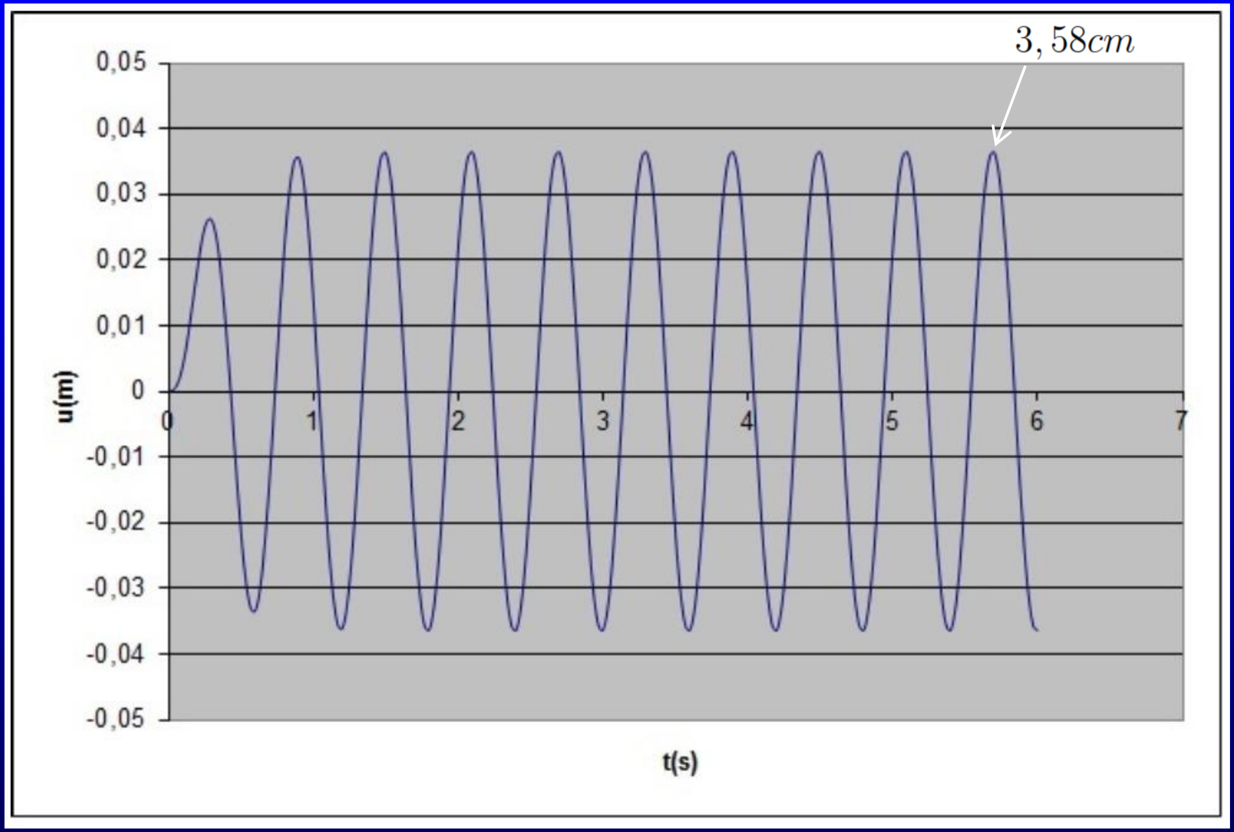
$$u_0 = 0 \text{ e } \dot{u}_0 = 0$$

$$\Delta t = 0,03\,s$$

$t_i\,(s)$	$u_i\,(m)$	$\dot{u}_i\,(m/s)$	$\ddot{u}_i\,(m/s^2)$	$\hat{k}\,(N/m)$	$\hat{R}_\theta\,(N)$	$u_\theta\,(m)$	$\ddot{u}_\theta\,(m/s^2)$
$0,00$	0	0	0	7464663	2562	0,000343218	1,167406839
$0,03$	0,000125079	0,01250793	0,833862028	7464663	11932	0,001598409	1,556753885
$0,06$	0,000953008	0,045269061	1,350213354	7464663	30581	0,004096733	1,525508117
$0,09$	0,002937457	0,08765362	1,475423899	7464663	58324	0,00781336	1,111911306
$0,12$	0,006192059	0,128021559	1,215772047	7464663	92587	0,012403418	0,406733062
$0,15$	0,01049312	0,155826446	0,637887057	7464663	128963	0,017276478	-0,464050904
$0,18$	0,015336898	0,163156579	-0,149211486	7464663	162000	0,021702313	-1,358589992
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Resposta a carregamento dinâmico geral

Exemplo: integração numérica da equação de movimento pelo método de Wilson-θ



$$\Delta t = 0,03\,s$$