

Microeconomia I

Equação de Slutsky

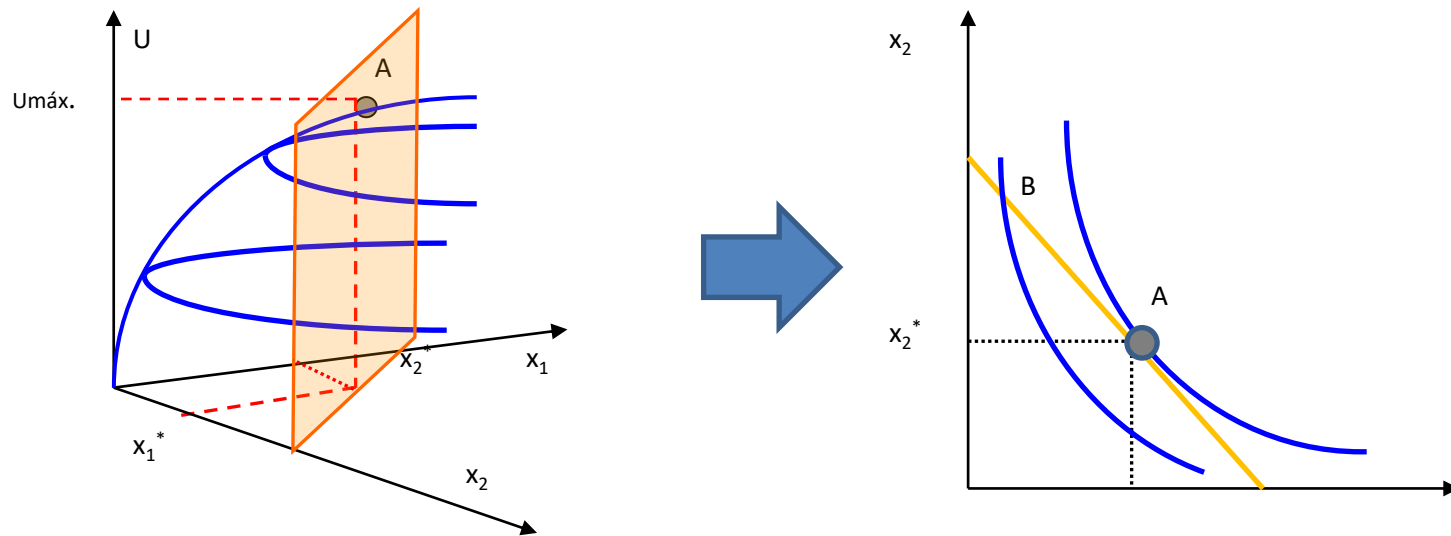
Prof. Fabio Barbieri

Revisão: o PMU

- Problema de Maximização da Utilidade:

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2)$$

$$\text{s.a. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = r$$



$$TMS = \frac{UMg1}{UMg2} = \frac{p_1}{p_2} \rightarrow \frac{UMg1}{p_1} = \frac{UMg2}{p_2}$$

Revisão: Demanda e Utilidade Indireta

- Algebricamente, a solução do problema de maximização da utilidade em função dos preços e renda gera as **funções demanda marshallianas**:

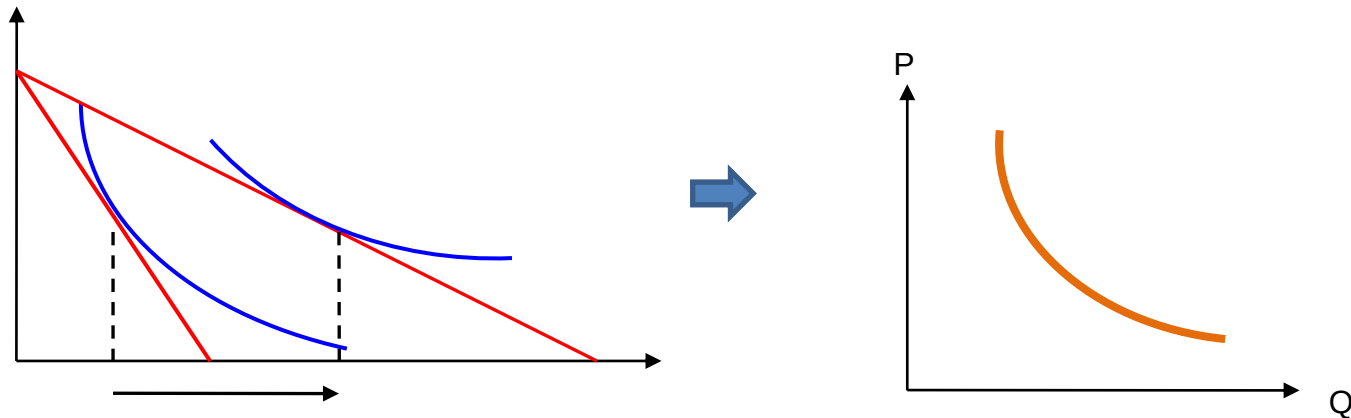
$$x_1 = f(p_1, p_2, r) \quad \text{e} \quad x_2 = f(p_1, p_2, r)$$

- Utilidade Indireta:
 - se inserirmos as funções demanda na utilidade $u(\cdot)$, obteremos a **função de utilidade indireta**, em função dos mesmos parâmetros exógenos:

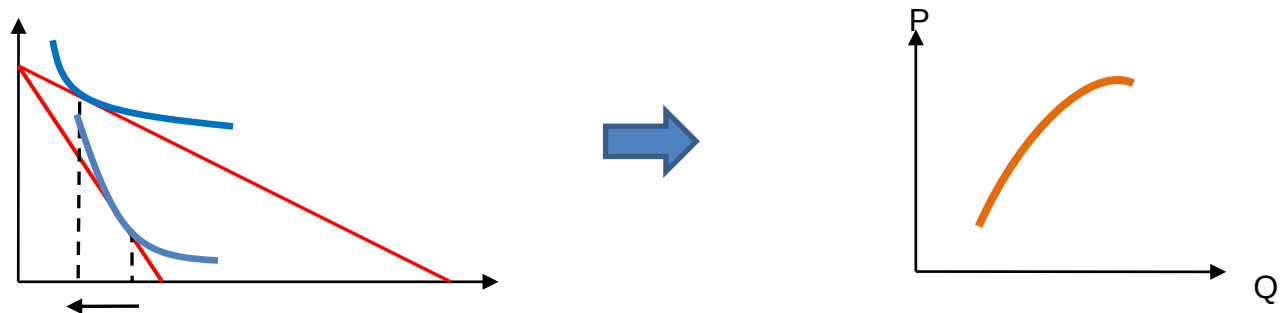
$$v(p_1, p_2, r)$$

Estática Comparativa: variação no preço

- Normalmente, variações no preço resultam em variação na demanda marshalliana no sentido oposto:



- Problema: a teoria não exclui a ocorrência do efeito oposto

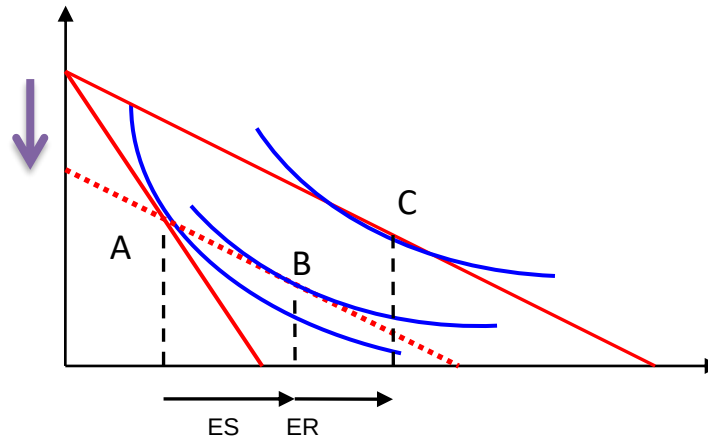


Efeitos Renda e Substituição

- Quando diminuimos o preço de um bem, a demanda pode tanto aumentar quanto diminuir.
- Para estudar esse problema, vamos dividir a variação total na demanda em duas partes:
 - efeito substituição:
 - causado apenas pela variação no preço relativo
 - efeito renda:
 - Causado apenas por variações na renda real
- Como definir variações na renda real? Compensações na renda:
 - Compensação de Slutsky
 - Aos preços novos, consumidor pode escolher a cesta escolhida anteriormente
 - Compensação de Hicks
 - Aos preços novos, consumidor pode retornar a curva de indiferente escolhida anteriormente

Compensação de Slutsky

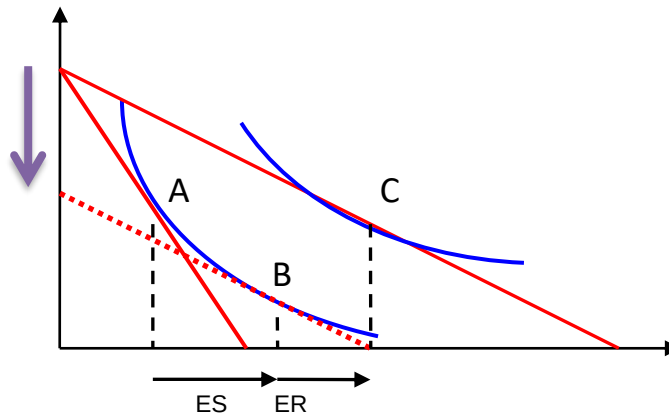
- A: escolha original (preço antigo)
- C: nova escolha (preço novo, menor)
- Compensação: retira renda nominal com preço novo, até que seja possível novamente comprar cesta A
- B: escolha com renda compensada e preços novos



- ES: efeito substituição – sempre oposto à variação de preço
- ER: efeito renda
 - Bens normais: efeito oposto à variação do preço
 - Bens inferiores: efeito a mesma direção da variação do preço

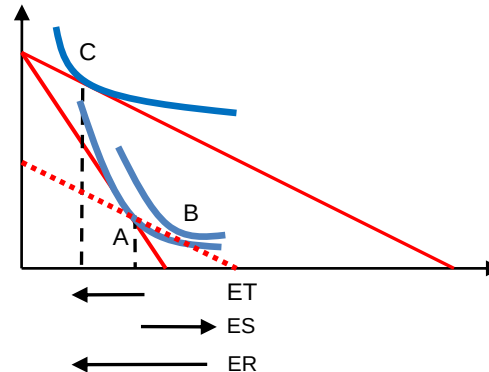
Compensação de Hicks

- A: escolha original (preço antigo)
- C: nova escolha (preço novo, menor)
- Compensação: retira renda nominal com preço novo, até que seja possível voltar a curva de indiferença original
- B: escolha com renda compensada e preços novos



Bens de Giffen

- A: escolha original (preço antigo)
- C: nova escolha (preço novo, menor)
- B: escolha com renda compensada (Slutsky) e preços novos



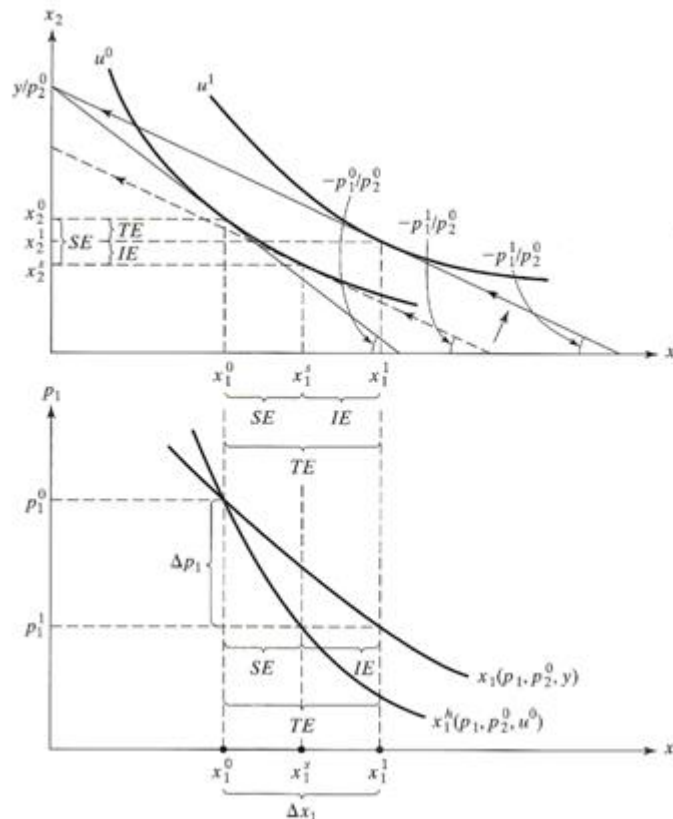
- Observação: o módulo do ER do bem inferior supera o módulo do ES, gerando curva de demanda positivamente inclinada!

Lei da Demanda

- Conclusão: todo bem de Giffen é um bem inferior

GIFFEN $\rightarrow$ INFERIOR

- A **lei da demanda** afirma que, compensando variações no poder de compra, teremos sempre relação inversa entre preço e quantidade demandada.
- Problema: como construir uma função de demanda compensada?



Exercícios

1997 - 1. Em relação à teoria do consumidor são corretas as seguintes afirmações:

- (0). Se as preferências de um consumidor são estritamente monótonas e estritamente convexas, na solução do problema do consumidor a taxa marginal de substituição deve ser igual à taxa de substituição econômica.
- (1). Um bem de Giffen pode ser um bem necessário.
- (2). Quando um indivíduo tem função de utilidade quase-linear o excedente do consumidor é uma medida exata de variação de bem-estar.
- (3). O efeito substituição próprio é sempre não positivo.

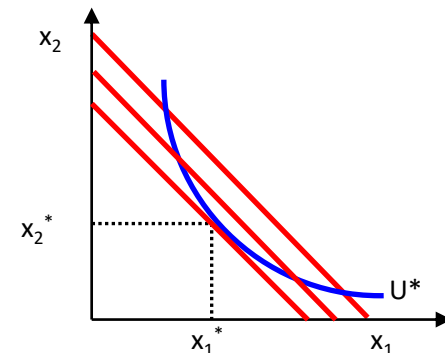
1998 - 3. Com relação à demanda, preço e renda, é correto afirmar que:

- (0) A curva de preço-consumo é representada graficamente pela relação entre o preço do bem (medido no eixo vertical) e a quantidade consumida daquele bem (medida no eixo horizontal).
- (1) A curva de Engel tem sempre inclinação positiva.
- (2) Para bens normais, o efeito-renda é sempre menor (em valor absoluto) que o efeito-substituição.
- (3) Para bens de Giffen, o efeito-renda é sempre maior (em valor absoluto) que o efeito-substituição.

O Problema de Minimização dos Gastos (PMG)

- Qual é o gasto mínimo para obtermos um nível u^* de utilidade?

$$\min_{x_1, x_2} p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{s.a. } u(x_1, x_2) = u^*$$



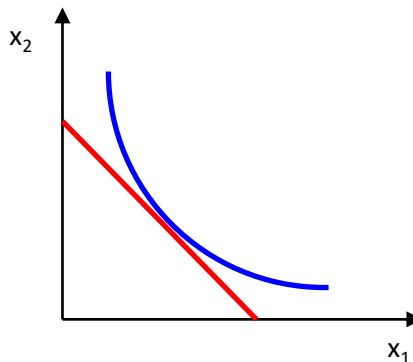
- a solução desse problema gera **funções de demanda hicksianas**:
 - $h_1(p_1, p_2, u)$ e $h_2(p_1, p_2, u)$
- Substituindo essas funções na função objetivo, obtemos a função gasto $e(\cdot)$:
 - $e(p_1, p_2, u) = p_1 h_1(p_1, p_2, u) + p_2 h_2(p_1, p_2, u)$

Dualidade

- Relação entre PMU e PMG: mesma solução

$$\begin{array}{ll} v(p, y) = \max_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) & e(p, u) = \min_{\mathbf{x}} p\mathbf{x} \\ \text{s.t. } p\mathbf{x} \leq y & \text{s.t. } u(\mathbf{x}) \geq u \end{array}$$

- $\mathbf{x}^*$ é solução do PMU $\leftrightarrow \mathbf{x}^*$ é solução do PMG



Equação de Slutsky

EFEITO TOTAL = EFEITO SUBSTITUIÇÃO + EFEITO RENDA

Algebricamente: a equação de Slutsky

(Евгений Слутский): Seja $x(p, y)$ o sistema de funções marshalliana. Seja u^* o nível de utilidade alcançado pelo consumidor aos preços $p \in \mathbb{R}_{++}^n$ e renda $y \in \mathbb{R}_+$. Então,

$$\frac{\partial x_i(p, y)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(p, u^*)}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i(p, y)}{\partial y} x_j(p, y)$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

Prova:

Considere a identidade: $h_i(p, u^*) \equiv x_i(p, e(p, u^*))$

Diferenciando ambos os lados em relação a p_j :

$$\frac{\partial h_i(p, u^*)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p, e(p, u^*))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, e(p, u^*))}{\partial y} \frac{\partial e(p, u^*)}{\partial p_j}$$

sendo que $\frac{\partial e(p, u^*)}{\partial p_j} = h_j(p, u^*)$: Lema de Shepard

CQD

EXEMPLOS ALGÉBRICOS

Solução Algébrica do PMU

Função Utilidade de Elasticidade de Substituição Constante (CES):

$$u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$$

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} \quad \text{s.t. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = y \\ \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} + \lambda(y - p_1 x_1 - p_2 x_2), \end{aligned}$$

C.P.O.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_1^{\rho-1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_2^{\rho-1} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

A solução desse sistema resulta nas demandas marshallianas:

$$x_1 = \frac{p_1^{1/(\rho-1)} y}{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{p_2^{1/(\rho-1)} y}{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}}$$

Vamos definir um novo parâmetro $r = \rho/(\rho-1)$, de modo a expressar a demanda de forma mais enxuta:

$$x_1(\mathbf{p}, y) = \frac{p_1^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r} \quad \text{e} \quad x_2(\mathbf{p}, y) = \frac{p_2^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r}$$

Solução Algébrica do PMU

- Obtendo a função utilidade indireta:

$$x_1(\mathbf{p}, y) = \frac{p_1^{r-1}y}{p_1^r + p_2^r} \quad \text{e} \quad x_2(\mathbf{p}, y) = \frac{p_2^{r-1}y}{p_1^r + p_2^r}$$

Substituindo as funções demanda marshalianas na função utilidade, obtemos:

$$\begin{aligned} v(\mathbf{p}, y) = u(x(\mathbf{p}, y)) &= \left[\left(\frac{p_1^{r-1}y}{p_1^r + p_2^r} \right)^\rho + \left(\frac{p_2^{r-1}y}{p_1^r + p_2^r} \right)^\rho \right]^{1/\rho} \\ &= y \left[\frac{p_1^r + p_2^r}{(p_1^r + p_2^r)^\rho} \right]^{1/\rho} = y (p_1^r + p_2^r)^{-1/r} \end{aligned}$$

Solução Algébrica do PMG

Função Utilidade de Elasticidade de Substituição Constante (CES)

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ \text{s.t.} \quad & U = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} \end{aligned}$$

Formamos o lagrangeano: $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda [u - (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}]$

CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \lambda (x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} \rho x_1^{\rho-1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - \lambda (x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} \rho x_2^{\rho-1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} - u = 0$$

Combinando as duas primeiras, temos: $x_1 = x_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/(\rho-1)}$

Versão adequada: Substituindo o resultado na restrição, isolando x_2 e adotando a definição anterior de r , temos as duas funções demanda hicksianas:

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{p}, u) &= p_1^{r-1} (p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} U \\ h_2(\mathbf{p}, u) &= p_2^{r-1} (p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} U \end{aligned}$$

Solução Algébrica do PMG

- Obtendo a função gasto:

$$\begin{aligned}h_1(\mathbf{p}, u) &= p_1^{r-1} (p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} U \\h_2(\mathbf{p}, u) &= p_2^{r-1} (p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} U\end{aligned}$$

Substituindo estas na função objetivo do PMG, obtemos a função gasto:

$$\begin{aligned}e(\mathbf{p}, u) &= p_1 h_1 + p_2 h_2 \\&= p_1 p_1^{r-1} (p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} U + p_2 p_2^{r-1} (p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} U \\e(\mathbf{p}, u) &= (p_1^r + p_2^r)^{(1/r)} U\end{aligned}$$

Note que a expressão da função gasto se assemelha a função utilidade original.

Exercício

(2010-2)

Considere a seguinte função utilidade $u(x, y) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, em que x denota a quantidade do bem 1 e y a quantidade do bem 2. Denote por p_x o preço do bem 1, por p_y o preço do bem 2 e por r a renda do consumidor. Responda V ou F às seguintes alternativas:

(0) A demanda pelo bem 2 é $y(p_x, p_y, r) = \frac{r}{p_y + \sqrt{p_x p_y}}$

(1) A utilidade indireta é dada por $V(p_x, p_y, r) = -\frac{p_x + p_y + 2\sqrt{p_x p_y}}{2r}$

(2) A função dispêndio tem a forma de Elasticidade de Substituição Constante;

(3) A função demanda hicksiana (ou compensada) pelo bem 1 é

$$h_x(p_x, p_y, u_0) = -\frac{\sqrt{p_x} + \sqrt{p_y}}{\sqrt{p_y}} u_0$$

(4) Para esta função utilidade, a equação de Slutsky não vale.

Exercício: solução

V (0) No ponto de utilidade máxima, a TMS é igual aos preços relativos:

$$TMS = \frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2}} = \frac{y^2}{x^2} = \frac{p_x}{p_y} \rightarrow x = \sqrt{\frac{p_y}{p_x}} y$$

Substituindo na restrição orçamentária, temos:

$$p_x x + p_y y = r \rightarrow p_x \sqrt{\frac{p_y}{p_x}} y + p_y y = r \rightarrow y = \frac{r}{p_y + \sqrt{p_x p_y}}$$

F (1) A função utilidade indireta é obtida pela substituição da demanda marshalliana de y encontrada acima, bem como pela substituição da expressão simétrica encontrada para x, na função utilidade, de modo que temos uma função utilidade expressa em termos dos preços e da renda:

$$V(p_x, p_y, r) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{p_x + \sqrt{p_x p_y}}{r} - \frac{p_y + \sqrt{p_x p_y}}{r} = \frac{-p_x - p_y - 2\sqrt{p_x p_y}}{r}$$

V (2) A função dispêndio, definida pelo gasto mínimo necessário para se obter um nível qualquer de utilidade, pode ser obtido pelo inverso da função utilidade indireta:

$$e(p_x, p_y, u) = r = \frac{-p_x - p_y - 2\sqrt{p_x p_y}}{u}$$

Notando que o numerador desta expressão é um quadrado perfeito, podemos exprimir a função dispêndio como uma expressão que lembra uma função de produção do tipo CES:

$$e(p_x, p_y, u) = -\frac{(p_x^{1/2} + p_y^{1/2})^2}{u}$$

Exercício: solução

F (3) A função demanda hicksiana pelo bem x (h_x) é a quantidade demandada do bem que minimiza o gasto e atinge nível de utilidade u aos preços correntes:

$$h_x(p_x, p_y, u) = x(p_x, p_y, e(p_x, p_y, u))$$

Substituindo a função gasto na função demanda marshalliana resulta em:

$$\begin{aligned} h(p_x, p_y, u) &= \frac{e(p_x, p_y, u)}{p_x + \sqrt{p_x p_y}} = \frac{-p_x - p_y - 2\sqrt{p_x p_y}}{p_x + \sqrt{p_x p_y}} \frac{1}{u} = - \left(1 + \frac{p_y + \sqrt{p_x p_y}}{p_x + \sqrt{p_x p_y}} \right) \frac{1}{u} \\ &= - \left(1 + \frac{\sqrt{p_x p_y}}{\sqrt{p_x p_y}} \frac{\sqrt{\frac{p_y}{p_x}} + 1}{\sqrt{\frac{p_x}{p_y}} + 1} \right) = - \frac{1}{u} \left(1 + \frac{\frac{\sqrt{p_y} + \sqrt{p_x}}{\sqrt{p_x}}}{\frac{\sqrt{p_x} + \sqrt{p_y}}{\sqrt{p_y}}} \right) = - \frac{1}{u} \left(1 + \frac{\sqrt{p_y}}{\sqrt{p_x}} \right) = - \frac{1}{u} \left(\frac{\sqrt{p_x} + \sqrt{p_y}}{\sqrt{p_x}} \right) \end{aligned}$$

Caso já tenha feito algum curso de micro em algum curso de mestrado, você poderá obter esse resultado de forma mais fácil através do Lema de Sheppard – a função hicksiana é a derivada da função gasto em relação ao preço:

$$h_x(p_x, p_y, u) = \frac{\partial e(p_x, p_y, u)}{\partial p_x}$$

F (4) A equação de Slutsky é dada por:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial r} x$$

Como calculamos as funções demanda hicksiana e marshalliana necessárias para calcular essa expressão e são ambas diferenciáveis, a equação acima pode ser encontrada.

Exercício: Equação de Slutsky

(2009-1) Considere uma função de utilidade Cobb-Douglas $U = q_1^\alpha q_2^{1-\alpha}$.
Modificação do enunciado: obtenha os efeitos renda e substituição

Solução:

PMG:

$$\min_{q_1, q_2} CT = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

$$\text{s.a. } q_1^\alpha q_2^{1-\alpha} = U$$

Lagrangeano:

$$L = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \lambda (U - q_1^\alpha q_2^{1-\alpha})$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = p_1 - \alpha \lambda q_1^{\alpha-1} q_2^{1-\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = p_2 - \lambda (1-\alpha) q_1^\alpha q_2^{-\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = U - q_1^\alpha q_2^{1-\alpha} = 0$$

Isolando λ nas duas primeiras equações e igualando as mesmas, obtemos:

$$\lambda = \frac{p_1}{\alpha q_1^{\alpha-1} q_2^{1-\alpha}} = \frac{p_2}{(1-\alpha) q_1^\alpha q_2^{-\alpha}} \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{q_2}{q_1}$$

Nessa última expressão, isolando-se sucessivamente q_1 e q_2 e substituído na terceira equação, obtemos as demandas hicksianas:

$$q_1^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{p_1}{p_2} q_1 \right)^{1-\alpha} = U \rightarrow q_1 = p_1^{\alpha-1} p_2^{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\alpha-1} U$$

$$\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} q_2 \frac{p_2}{p_1} \right)^\alpha q_2^{1-\alpha} = U \rightarrow q_2 = p_1^\alpha p_2^{-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^\alpha U$$

Exercício: Equação de Slutsky

PMU:

$$\begin{aligned} \max_{q_1, q_2} V = \ln U &= \alpha \ln q_1 + (1-\alpha) \ln q_2 \\ \text{s.a. } p_1 q_1 + p_2 q_2 &= w \end{aligned}$$

$$L = \alpha \ln q_1 + (1-\alpha) \ln q_2 + \lambda(w - p_1 q_1 - p_2 q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\alpha}{q_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{1-\alpha}{q_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 q_1 + p_2 q_2 = w$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{p_1 q_1} = \frac{1-\alpha}{p_2 q_2} \quad p_1 q_1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} p_1 q_1 = w \rightarrow q_1 = \frac{\alpha w}{p_1}$$

Exercício: Equação de Slutsky

Considere a equação de Slutsky,

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial w} x, \text{ onde } x \text{ representa a demanda marshalliana e } h \text{ a demanda hicksiana.}$$

O **efeito renda** é representado pela última parcela da equação de Slutsky:

$$-\frac{\partial x}{\partial w} x = -\frac{\alpha}{p_1} \frac{\alpha w}{p_1} = -\frac{\alpha^2 w}{p_1^2}$$

O **efeito substituição**, por sua vez, é dado por:

$$\frac{\partial h}{\partial p_1} = (\alpha - 1) p_1^{\alpha-2} p_2^{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\alpha-1} U$$