

2020-2, "FISMAT-AV", AULAS 16
E 17

OBJETIVOS: DISCUTIR ALGUNS
ASPECTOS DE DISTRIBUIÇÕES "NO $\mathbb{R}^n$ ".

(CONT.) 2.6 PROPRIEDADES DE DISTRIBUIÇÕES

→ OBSERVAÇÕES DIVERSAS

- HÁ VÁRIOS "CASOS ESPECIAIS" QUE EXIGEM CUIDADOS NA TEORIA DE DISTRIBUIÇÕES. NÃO EXISTE $\delta(x^2)$, POR EXEMPLO, EMBORA $\delta(x^2 - a^2)$ SEJA BEM DEFINIDA PARA $a \neq 0$.

- NA TEORIA "NORMAL", NÃO É POSSÍVEL DEFINIR UM PRODUTO DE DISTRIBUIÇÕES, DE MODO QUE, POR EXEMPLO, NÃO EXISTE $\delta^2(x) = [\delta(x)]^2$. PORÉM, EXISTE A TEORIA DE COLOMBEAU.

• HÁ DIVERSAS REPRESENTAÇÕES DA DELTA DE DIRAC POR INTEGRAIS OU SÉRIES INFINITAS DIVERGENTES. NORMALMENTE, TAIS REPRESENTAÇÕES SÃO BASEADAS EM ESTRUTURAS MATEMÁTICAS DO PROBLEMA EM QUESTÃO.

• EM ALGUNS PROBLEMAS EM FÍSICA, APARECEM EXPRESSÕES ANÁLOGAS A

$$I \equiv \int_a^b \delta(x-a) h(x) dx, \quad b > a.$$

SERÁ QUE $I = h(a)$? OU $I = \frac{1}{2} [h(a^+) + h(a^-)]$?
?

A CONVENÇÃO PODE DEPENDER DA FÍSICA E DEVE SER MANTIDA DURANTE TODO O CÁLCULO! VEREMOS UM EXEMPLO QUANDO DISCUTIRMOS O VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY NOVAMENTE.

2.7 DISTRIBUIÇÕES "NO $\mathbb{R}^n$ "

A DELTA DE DIRAC EM 3 DIMENSÕES, $\delta^{(3)}(\vec{r})$ OU APENAS $\delta(\vec{r})$, SE NÃO HOUVER POSSIBILIDADE DE CONFUSÃO, É DEFINIDA POR SUA AÇÃO SOBRE FUNÇÕES TESTE $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$,

$$\langle \delta^{(3)}, h \rangle \equiv h(\vec{0})$$

OU

$$\int_{\Omega} \delta^{(3)}(\vec{r}) h(\vec{r}) dV = \begin{cases} h(\vec{0}), & \text{se } \vec{0} \in \Omega \\ 0, & \text{se } \vec{0} \notin \Omega \end{cases}$$

É COMUM ESCREVERMOS

$$\delta^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z),$$

MAS ISSO NÃO É UM PRODUTO DE DISTRIBUIÇÕES. O QUE É, ENTÃO?!

→ PRODUTO TENSORIAL (OU DIRETO)

SE $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$ E $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ FOREM FUNÇÕES QUAISQUER, SEU PRODUTO TENSORIAL $f \otimes g: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ É DEFINIDO COMO

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(z) &= (f \otimes g)(\overbrace{z^1, \dots, z^p}^{x = (x^1, \dots, x^p)}, \underbrace{z^{p+1}, \dots, z^{p+n}}_{y = (y^1, \dots, y^n)}) = \\ &= f(x) \cdot g(y) \end{aligned}$$

$$(f \otimes g)(x, y)$$

AGORA, SEJAM f E g FLI's. SE $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{p+n})$,

$$\begin{aligned} \langle f \otimes g, h \rangle &= \iint dx dy f(x) g(y) h(x, y) = \\ &= \int dx f(x) \left[\int dy g(y) h(x, y) \right] = \langle f, \underbrace{\langle g, h \rangle}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)} \rangle \end{aligned}$$

EM GERAL, SE $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$ E
 $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ FOREM DISTRIBUIÇÕES
 ARBITRÁRIAS, O SEU PRODUTO TEN-
SORIAL DE DISTRIBUIÇÕES É DEFINI-
 DO COMO

$$\langle S \otimes T, h \rangle \equiv \langle S, \langle T, h \rangle \rangle$$

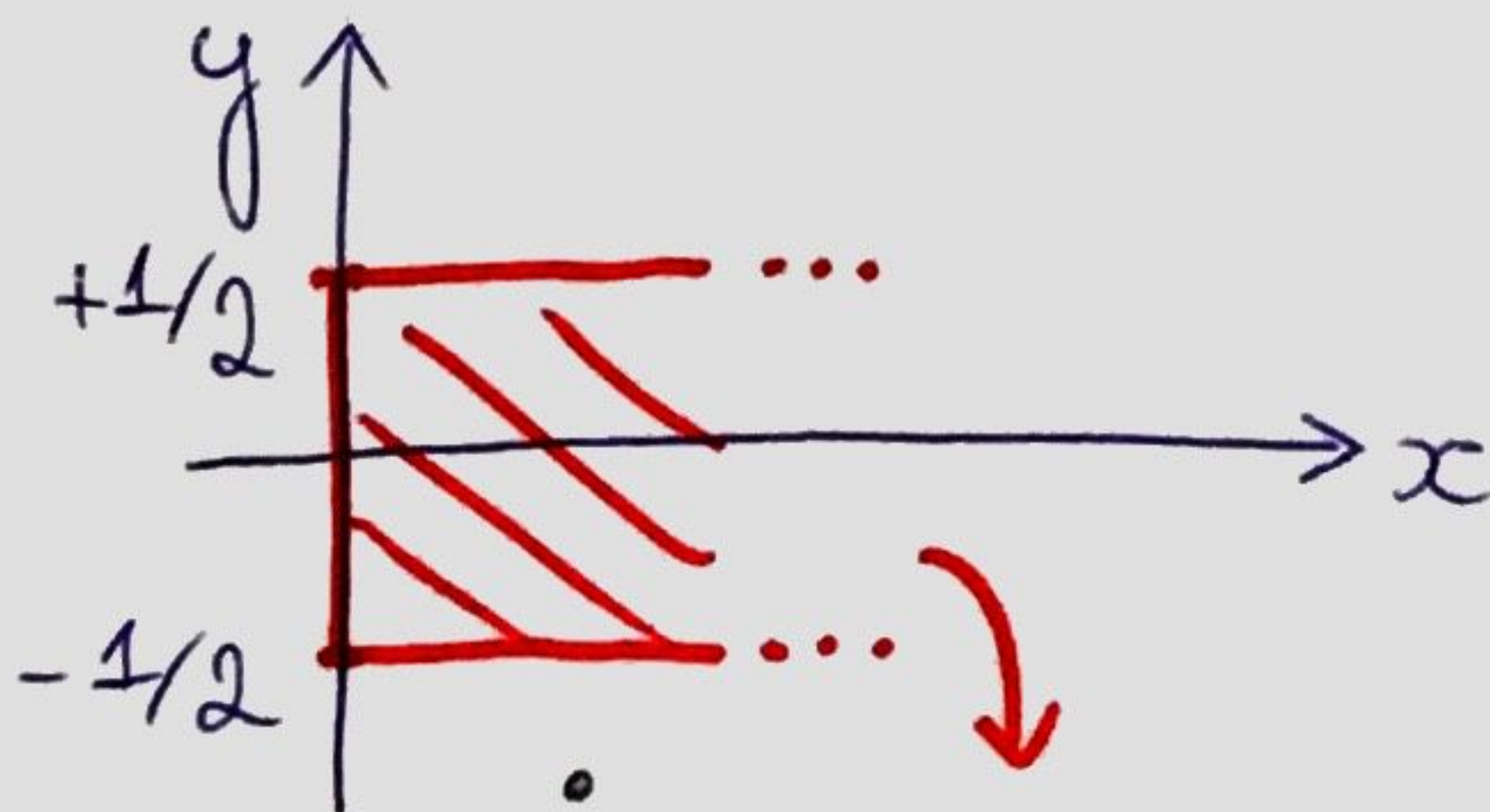
OU

$$\langle S(x)T(y), h(x,y) \rangle = \langle S(x), \langle T(y), h(x,y) \rangle \rangle$$

◇ EXEMPLOS:

(i) (FUNÇÕES) H , HEAVISIDE

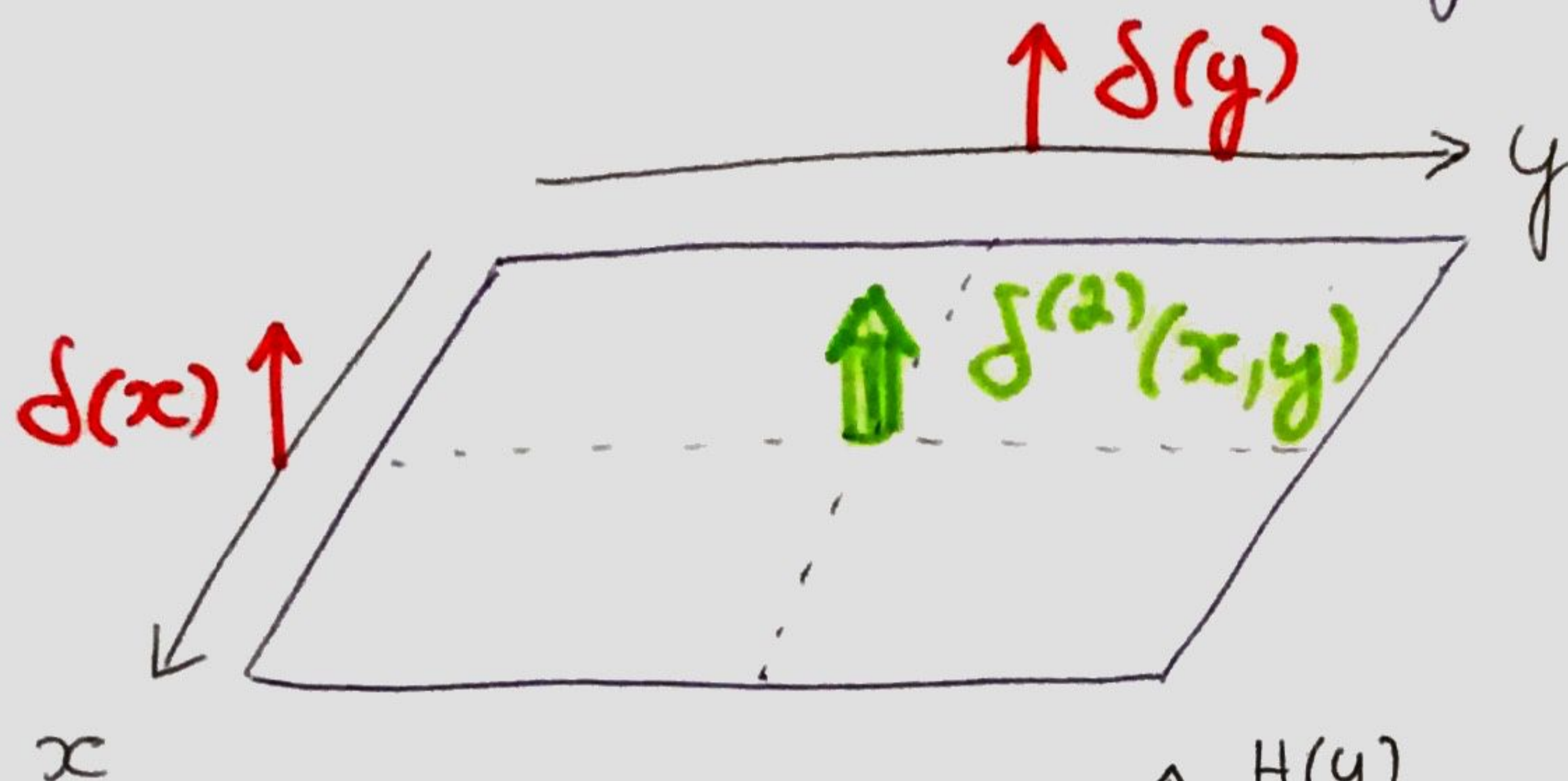
$$\pi(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq 1/2 \\ 0, & |y| > 1/2 \end{cases}$$



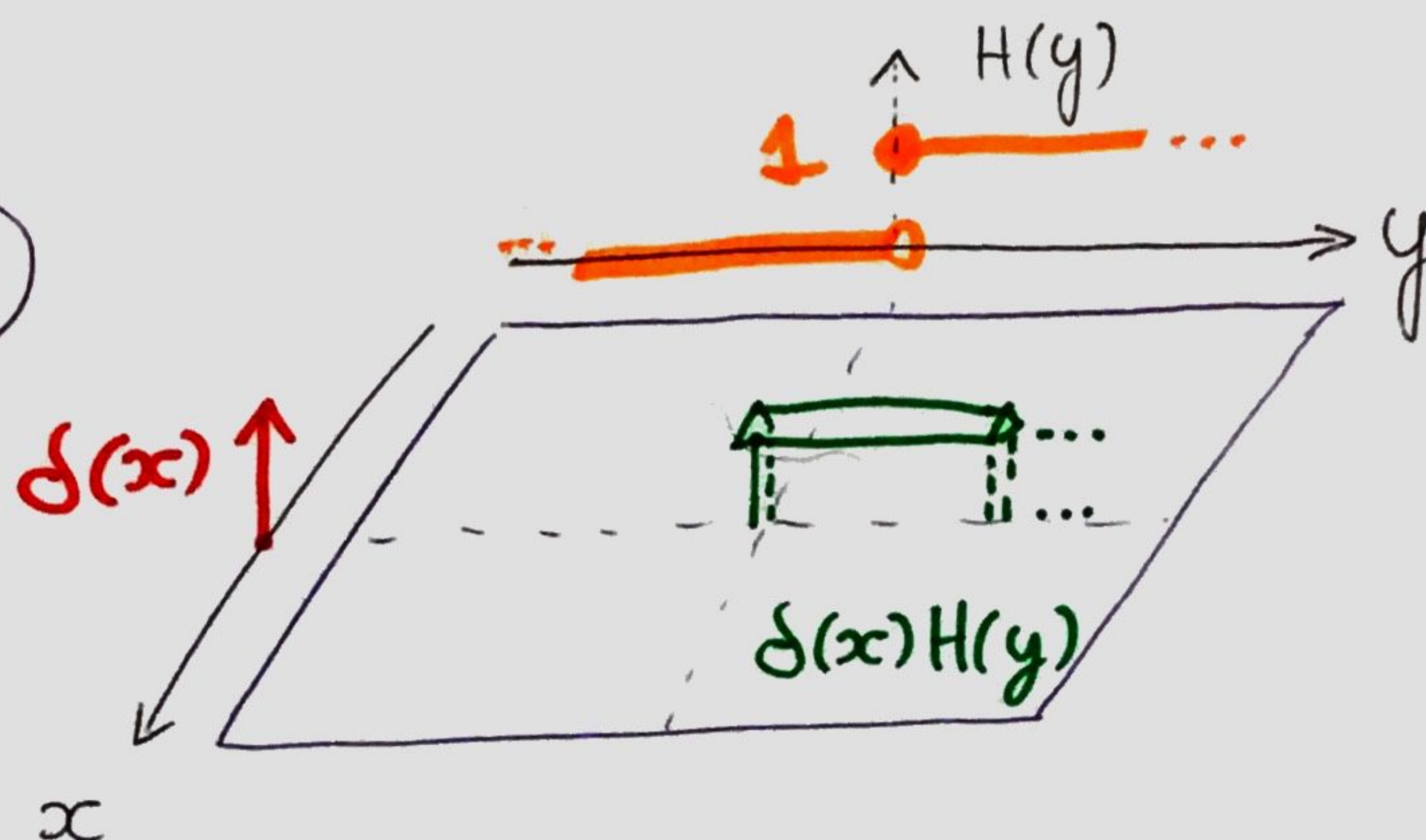
$$H(x)\pi(y)=0$$

$$H(x)\pi(y)=1$$

(ii) $\delta^{(2)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$; $\delta^{(2)}(x,y) = \delta(x) \cdot \delta(y)$



(iii)



$$\langle \delta(x)H(y), h(x,y) \rangle =$$

$$= \int dx \delta(x) \left[\int dy H(y) h(x,y) \right]$$

$$= \int dx \delta(x) \left[\int_0^\infty dy \cdot h(x,y) \right]$$

$$= \int_0^\infty dy \cdot h(0,y)$$

(iv) FUNÇÕES/DISTRIBUIÇÕES CONSTANTES COSTUMAM "FICAR OCULTAS":

$\sim \mathbb{R}^3$? NÃO! $\rightarrow$

$$\begin{aligned}\langle \delta(x), h(x, y) \rangle &\equiv \langle \delta(x) \mathbb{1}(y), h(x, y) \rangle = \\ &= \int dx \delta(x) \left[\int dy \overset{1.}{h(x, y)} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot h(0, y) .\end{aligned}$$

ISSO EXPLICA O TRATAMENTO DE DISTRIBUIÇÕES LINEARES E SUPERFICIAIS DE CARGA ELÉTRICA NO $\mathbb{R}^3$, EM ELETROMAGNETISMO.

$\rightarrow$ "NOTAÇÃO FÍSICA"

* DIRAC PONTUAL

EM COORDENADAS CARTESIANAS,

$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x') \cdot \delta(y - y') \cdot \delta(z - z')$ É UMA EXPRESSÃO ÚTIL. MAS, SE $x \neq x'$, NOTE QUE $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = 0$, MESMO QUE $y = y'$ E $z = z'$. PARECE QUE $0 \cdot \infty \cdot \infty = 0$!!!

NÃO É PRODUTO, E $\delta(x)$ NÃO EXISTE!!!

"AGINDO EM UMA VARIÁVEL ESPACIAL",
 $\delta^{(3)}$ TEM DIMENSÃO DE INVERSO DE VO-
 LUME. EM OUTROS SISTEMAS DE COOR-
 DENADAS, "AJUSTES" SÃO NECESSÁRIOS.
[L]: DIMENSÃO DE COMPRIMENTO

ESFÉRICAS: $\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}') =$

$$= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r-r') \cdot \delta(\theta-\theta') \cdot \delta(\varphi-\varphi')$$

$\hookrightarrow 1/[L]$ $\hookrightarrow$ ADIMENSIONAL $\hookleftarrow$

CILÍNDRICAS

$$\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{\rho} \delta(\rho-\rho') \cdot \delta(\varphi-\varphi') \cdot \delta(z-z')$$

$\hookrightarrow 1/[L]$ $\hookleftarrow$

EM GERAL: $\delta^{(n)}(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{|J(\vec{x}, \vec{y})|} \delta^{(n)}(\vec{y}-\vec{y}')$

JACOBIANO $\hookleftarrow$

EM UMA MUDANÇA DE VARIÁVEIS $\vec{x} \rightarrow \vec{y}$,

POIS $1 = \int d^n x \delta^{(n)}(\vec{x}-\vec{x}')$

$$= \int [d^n y |J(\vec{x}, \vec{y})|] \cdot \left[\frac{1}{|J(\vec{x}, \vec{y})|} \delta(\vec{y}-\vec{y}') \right]$$

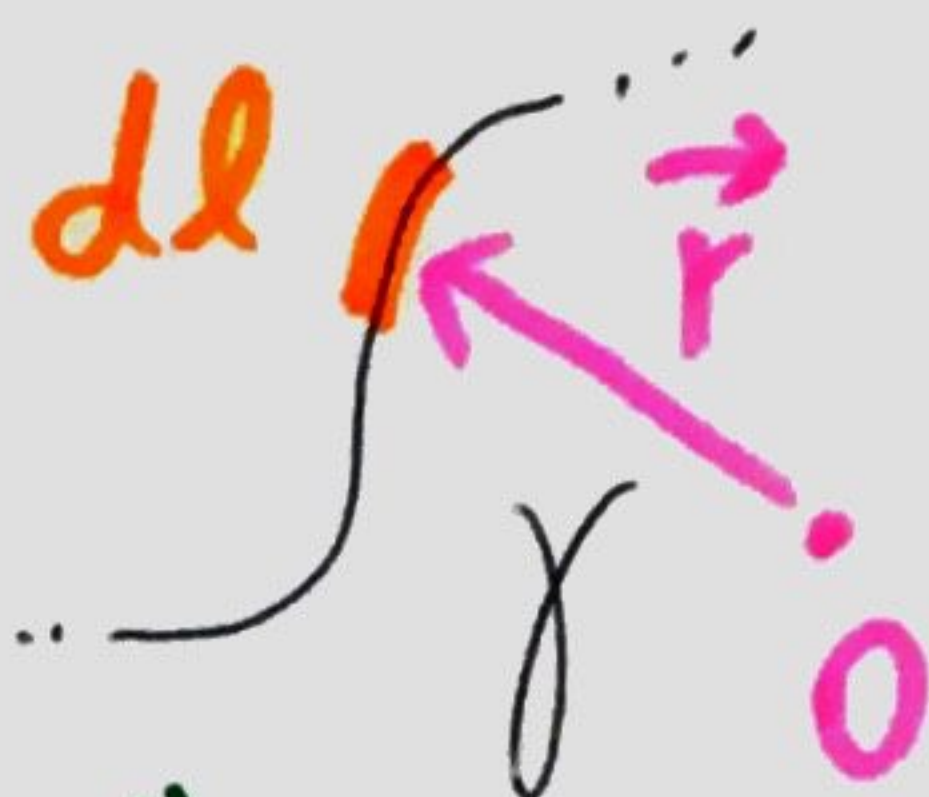
* DIRAC LINEAR

UMA DENSIDADE LINEAR DE CARGA ELÉTRICA, POR EXEMPLO, PODE SER DESCRITA POR UMA DISTRIBUIÇÃO CURVILÍNEA DE DIRAC, QUE, SOBRE QUALQUER $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, AGE APENAS NOS PONTOS DE UMA CURVA $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ COMO

$$\langle \delta_\gamma, h \rangle \equiv \int_\gamma h \, dl$$

$$[\delta_\gamma] = \frac{1}{[L]^2}$$

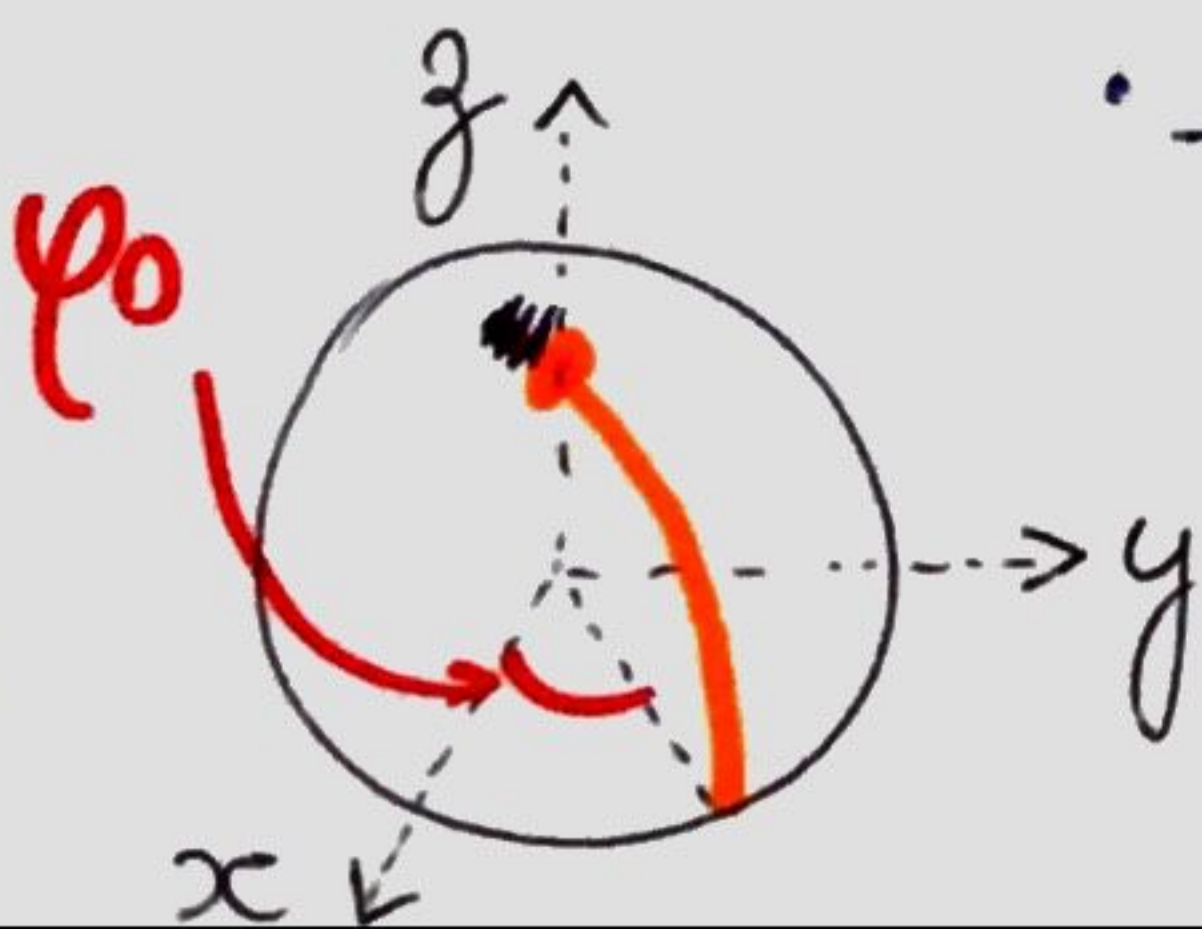
$$= \int d^3r \, \delta_\gamma(\vec{r}) \lambda(\vec{r})$$



◇ EXEMPLO: INTEGRAÇÃO AO LONGO DE UM MERIDIANO

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\varphi \, d\theta \, dr \, (r^2 \sin\theta)$$

$$\cdot \frac{\delta(r-R) \delta(\varphi-\varphi_0) \cdot h(r, \theta, \varphi)}{r \sin\theta}$$



ILUSTRADO APENAS O PRIMEIRO OCTANTE... ◇

* DIRAC SUPERFICIAL

ANALOGAMENTE, UMA DISTRIBUIÇÃO SUPERFICIAL DE DIRAC, DE DIMENSÃO IGUAL AO INVERSO DE COMPRIMENTO, AGE SOBRE $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ EM UMA SUPERFÍCIE SUA VE $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ COMO

$$\langle \delta_S, h \rangle \equiv \int_S h(\vec{r}) \overbrace{dA}^{d^2r}.$$