PMT3306 - Módulo “Viscoleasticidade e viscoplasticidade” - Material de apoio - Parte 1

Cláudio Geraldo Schön

Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

29 de setembro de 2020

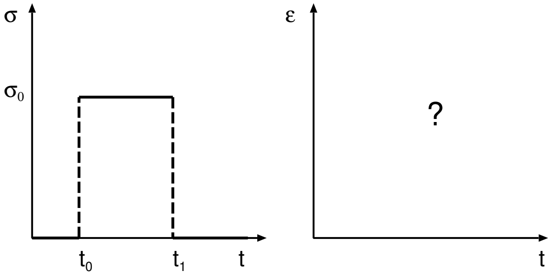
Temperatura homóloga

$$\tau_H = \frac{T}{T_f}$$

Efeitos macroscópicos começam a ser sentidos com $\tau_H \gtrsim 0{,}3$.

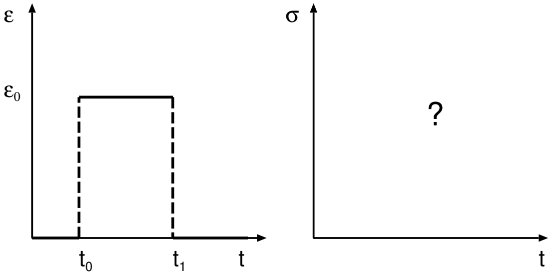
Ensaios idealizados

- O ensaio de fluência (*creep*).
- O ensaio de relaxação de tensão (*stress relaxation*).

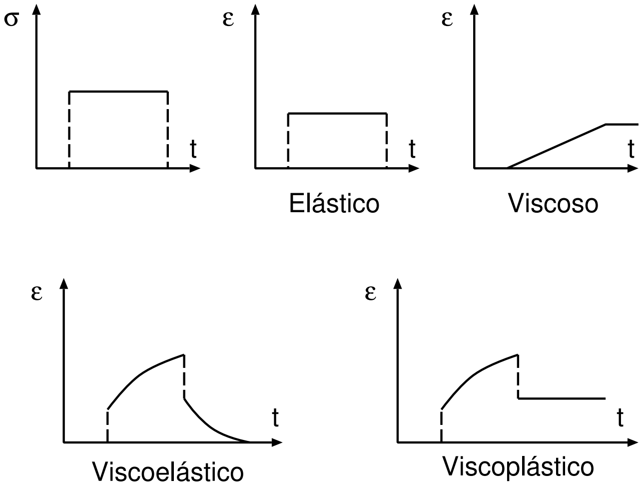


Ensaios idealizados

- O ensaio de fluência (*creep*).
- O ensaio de relaxação de tensão (*stress relaxation*).



Respostas idealizadas em fluência



Viscosidade

$$\tau = \eta \left(\dot{\gamma}\right)^m$$

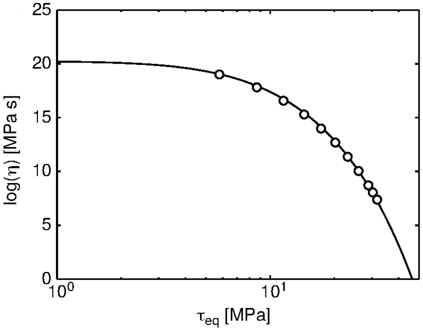
- $m = 1 \rightarrow$ fluídos newtonianos
- $m = 0 \rightarrow$ materiais plásticos ideais

Materiais tixotrópicos

Viscosidade não linear:

$$\tau = [\eta(\dot{\gamma})]\,\dot{\gamma}$$

Relevância: polímeros são tixotrópicos



H. E. H. Meijer, L. Govaert "Mechanical performance of polymer systems: the relation between structure and properties" *Progr. Polym. Sci.* **30** (2005) 915 – 938.

Ativação térmica

Princípio da superposição termo-temporal

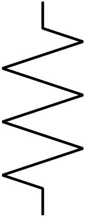
$$\eta = \eta_0 \exp\left(\frac{\Delta H}{k_B T}\right)$$

Assim

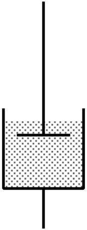
$$\ln \dot{\gamma} \leftrightarrow T^{-1}$$

Princípio da superposição termo-temporal.

Dispositivos idealizados



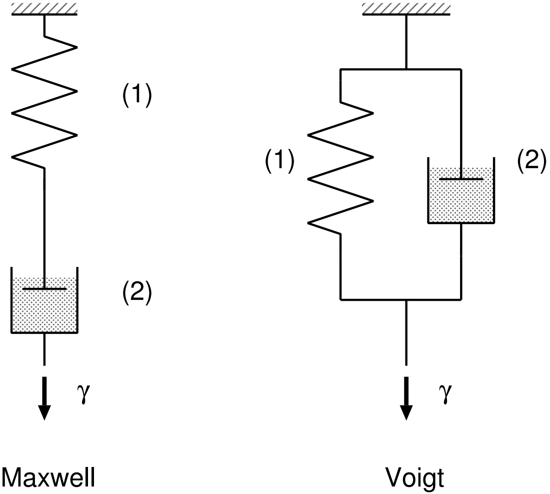
Mola



Amortecedor

$$\tau = G\gamma \quad \text{mola}$$
$$\tau = \eta\dot{\gamma} \quad \text{amortecedor}$$

Modelos simplificados



Modelo de Maxwell

Tensão é compartilhada entre os dispositivos:

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = G\frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t} \quad \text{e} \quad \tau = \eta\frac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}t}$$

Combinando teremos:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} + \frac{\tau}{\eta}$$

Ensaio de fluência:

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 \\ \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \qquad (t_0 \leq t < t_1)$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\tau_0}{\eta} \Rightarrow \gamma = \frac{\tau_0 t}{\eta}$$

Modelo de Maxwell

Tensão é compartilhada entre os dispositivos:

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = G\frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t} \quad \text{e} \quad \tau = \eta\frac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}t}$$

$$t_r = \frac{\eta}{G}$$

Combinando teremos:

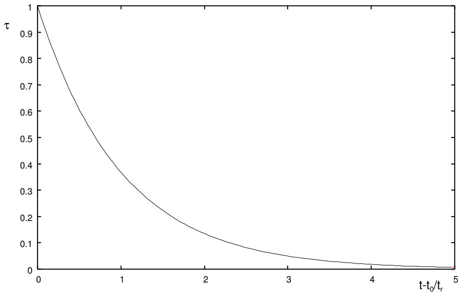
$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} + \frac{\tau}{\eta}$$

Ensaio de relaxação de tensão:

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_0 \\ \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \qquad (t_0 \leq t < t_1)$$

$$\dot{\tau} + \frac{G}{\eta}\tau = 0$$

$$\tau = \tau_0 \exp\left[-\frac{G}{\eta}(t - t_0)\right]$$



Modelo de Voigt

Deformação é compartilhada entre os dispositivos:

$$\tau = \eta\dot{\gamma} + G\gamma$$

Ensaio de relaxação de tensão:

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_0 \\ \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \qquad (t_0 \leq t < t_1)$$

logo

$$\gamma = \frac{\tau_0}{G}$$

Modelo de Voigt

Deformação é compartilhada entre os dispositivos:

$$\tau = \eta\dot{\gamma} + G\gamma$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + \frac{G}{\eta}\gamma = \frac{\tau_0}{\eta}$$

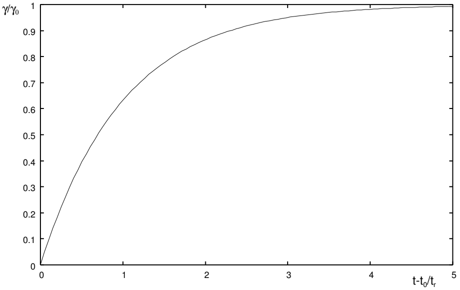
cuja solução é dada por:

$$\gamma = \gamma_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{t_r}\right)\right]$$

com

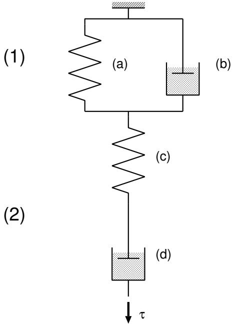
$$\gamma_\infty = \frac{\tau_0}{G}$$

$$t_r = \frac{\eta}{G}$$



Modelos mais sofisticados

Modelo de quatro elementos



Conjunto (1), solução de Voigt com

$$t_r = \frac{\eta_b}{G_a}$$

Passando agora ao conjunto (2),

$$\gamma_{(2)}(t) = \frac{\tau(t)}{G_c} + \int_0^t \frac{\tau(t')}{\eta_d} \mathrm{d}t'$$

Para o ensaio de fluência $\tau(t) = \tau_0$ para $t_0 \leq t < t_f$, assim a solução do problema neste intervalo de tempo é dada por:

$$\gamma(t) = \gamma_{(1)}(t) + \gamma_{(2)}(t) = \frac{\tau_0}{G_a}\left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{t_r}\right)\right] + \frac{\tau_0}{G_c} + \frac{\tau_0}{\eta_d}t$$

Módulos dinâmicos

Módulo de relaxação (*relaxation modulus*)

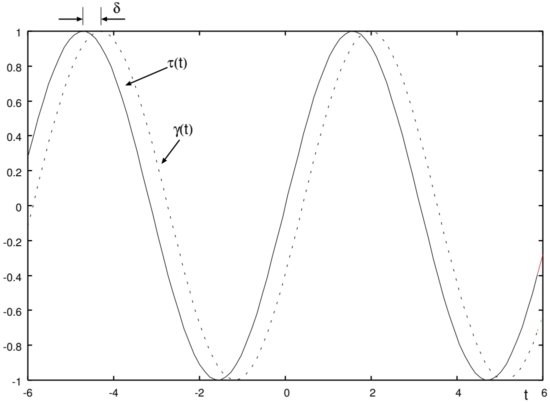
$$G(t) = \frac{\tau(t)}{\gamma_0}$$

Módulo de flexibilidade em fluência (*creep compliance*)

$$T(t) = \frac{\gamma(t)}{\tau_0}$$

Ensaio dinâmico mecânico diferencial

Dynamical mechanical analysis (DMA)



$$\tau(t) = \exp\left[\mathrm{i}\omega t\right] \Rightarrow \gamma(t) = A \exp\left[\mathrm{i}\omega t + \delta\right]$$

Módulos complexos

$$\tau(t) = G^* \gamma(t)$$

onde

$$G^* = G' + iG'' \quad \text{e} \quad \tan\delta = \frac{G'}{G''}$$

com

$$G' = A\cos\delta \quad \text{e} \quad G'' = A\sin\delta$$