Capítulo 2

Variáveis Aleatórias Discretas

1.1 Conceito de Variável Aleatória

Definição 1.1.1 *Uma variável aleatória é uma função que associa um número real a cada elemento de* Ω.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.1.1 *Uma moeda é lançada cinco vezes. Seja* X *a v.a que denota o número de caras em cada sequência de lançamentos. Então,* X *pode assumir os seguintes valores* $I_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Exemplo 1.1.2 *Lançar duas vezes o mesmo dado.*

- *A soma dos dois valores é uma v.a.*
- *O número de seis em cada lançamento é uma v.a.*
- *A função que leva cada par ao valor do segundo lançamento elevado à quinta potência, também é uma v.a.*

Exemplo 1.1.3 *Seja* X *uma variável aleatória discreta:*

$$X(a) = sinal(a) = \begin{cases} 1 & se \;\; a > 0 \\ 0 & se \;\; a = 0 \\ -1 & se \;\; a < 0. \end{cases}$$

1.2 Distribuição de massa de probabilidade

Uma v.a discreta tem a ela associada uma distribuição de probabilidade que fornece a probabilidade da v.a assumir cada um dos elementos de seu conjunto imagem. A distribuição de probabilidade é a principal

maneira de caracterizarmos uma variável aleatória. Vamos denotá-la por p_X. Em particular, se x for um valor que a v.a X pode assumir, $p_X(x)$ é a probabilidade de ocorrer o evento $\{X = x\}$ que consiste de todos os elementos de Ω que são levados por X ao valor numérico x, ou seja:

$$p_X(x) = \mathbb{P}(\{X = x\}),$$

tal que

$$\sum_x \mathbb{P}(X = x) = 1, \ \forall x \in I_X.$$

Exemplo 1.2.1 *Vamos considerar o experimento aleatório que envolve o lançamento de dois dados com 4 faces. O espaço amostral nesse caso é*

$\Omega = \{$*(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),*
(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)$\}$.

Podemos definir a variável aleatória como sendo o máximo dos resultados de um lançamento desses dois dados. Ou seja,

$X(\omega) = \max(x_1, x_2)$.
Para $\omega = (1,1)$ *temos* $X((1,1)) = 1$.
Para $\omega = (1,2)$ *temos* $X((1,2)) = 2$.
Para $\omega = (4,2)$ *temos* $X((4,2)) = 4$.

No exemplo do lançamento de dois dados, pode ser importante saber "com que probabilidade a v.a X assume, por exemplo, o valor 2". Essa pergunta pode ser representada matematicamente por:

$$\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \mathbb{P}(X = 2),$$

onde $\{X = 2\}$ é o conjunto de todos os elementos de Ω que são levados pela v.a X ao valor numérico 2. Temos assim que

$$\{X = 2\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 2\} = \{(1,2), (2,1), (2,2)\}.$$

Se os eventos elementares forem equiprováveis, então:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(\{(1,2), (2,1), (2,2)\}) \\ &\overset{(A_3)}{=} \mathbb{P}(\{(1,2)\}) + \mathbb{P}(\{(2,1)\}) + \mathbb{P}(\{(2,2)\}) = 3/16, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(\{(1,3), (2,3), (3,3), (3,2), (3,1)\}) \\ &\overset{(A_3)}{=} \mathbb{P}(\{(1,3)\}) + \mathbb{P}(\{(2,3)\}) + \mathbb{P}(\{(3,3)\}) + \mathbb{P}(\{(3,2)\}) + \mathbb{P}(\{(3,1)\}) = 5/16. \end{aligned}$$

O símbolo (A_3), representa o uso do axioma 3 em determinada igualdade.

Exemplo 1.2.2 *Considere o lançamento de duas moedas honestas. Seja X a v.a que representa o número de caras obtidas nos lançamentos, X assume os valores $0,1$ ou 2, ou seja, $I_X = \{0,1,2\}$. Então nesse caso, dizer quem é a distribuição de probabilidade de X é encontrar:*

$$\mathbb{P}(\{X=0\}),\ \mathbb{P}(\{X=1\}),\ \mathbb{P}(\{X=2\}).$$

Temos que

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\},$$

onde H (Head) e T (Tail) denotam cara e coroa, respectivamente.

Primeiro passo *é perguntar: Quem é o evento $\{X=0\}$?*

$$\{X=0\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\} = \{TT\}.$$

Em seguida fazer a mesma pergunta para $\{X=1\}$ e $\{X=2\}$.

Segundo passo: *Descobrir $\mathbb{P}(\{X(\omega)=x\})$.*
Para moedas honestas:

$$\mathbb{P}(\{HH\}) = \mathbb{P}(\{HT\}) = \mathbb{P}(\{TH\}) = \mathbb{P}(\{TT\}) = 1/4.$$

Então:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X(\omega)=0\}) &= 1/4\\
\mathbb{P}(\{X(\omega)=1\}) &= 1/2\\
\mathbb{P}(\{X(\omega)=2\}) &= 1/4
\end{aligned}$$

Terceiro passo: *Verificar se:*

$$\mathbb{P}(\{X(\omega)=0\}) + \mathbb{P}(\{X(\omega)=1\}) + \mathbb{P}(\{X(\omega)=2\}) = 1.$$

Quarto passo: *Organizar as idéias:*

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/4 & \textit{se } x = 0 \textit{ ou } x = 2\\ 1/2 & \textit{se } x = 1\\ 0 & \textit{caso contrário.}\end{cases}$$

Resumindo: *Para determinarmos a distribuição de probabilidade da v.a X, temos que*

1. *Encontrar todos os valores que a v.a. X assume.*
2. *Encontrar todos os eventos elementares contidos no evento $\{X=x\}$.*
3. *Somar suas probabilidades para obter $p_X(x)$.*

E se desejamos calcular $\mathbb{P}(X>0)$? Inicialmente, vamos descobrir quem é o evento $\{X>0\}$.

$$\{X>0\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > 0\}$$

$$\{X>0\} = \{HT, TH, TT\} = \underbrace{\{HT\} \cup \{TH\}}_{X=1} \cup \underbrace{\{TT\}}_{X=2}.$$

Logo,

$$\mathbb{P}(X>0) = \mathbb{P}(\{X=1\} \cup \{X=2\}) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) = 1/2 + 1/4 = 3/4.$$