

Capítulo 4

Primeiro Contato com Projeto H_∞

Neste capítulo, apresentamos como traduzir especificações de sistemas de controle em malha fechada em termos da função sensibilidade S utilizando-se a chamada função peso de desempenho. O problema é formulado em termos da planta nominal. Também apresentamos, sem profundidade matemática, mas suficiente para utilização, a primeira técnica de projeto H_∞ , que é o método de sensibilidade mista S/KS . Também apresentamos dois exemplos de projeto utilizando-se funções do MATLAB, e por fim apresentamos resultados teóricos que colocam limites no desempenho de sistemas em malha fechada, sobretudo os que têm plantas de fase não-mínima e/ou instáveis.

4.1 Primeiro Problema: Maximização de Robustez de Estabilidade

Do que foi visto até agora, a robustez de estabilidade de um sistema SISO pode ser medida por:

$$\|S\|_\infty = \max_{\omega} |S(j\omega)| = \max_{\omega} \frac{1}{L(j\omega)}$$

de modo que quanto menor for esse número, maior é a robustez de estabilidade do sistema. Seria interessante projetar um controlador $K(s)$ tal que a robustez fosse máxima. Trata-se então de um problema de otimização. Entretanto, o espaço de busca nesta otimização (que é o espaço dos possíveis controladores) somente pode conter os controladores que estabilizam internamente o sistema, ou seja, é o espaço que foi definido na seção 2.6.4. Em outras palavras, o problema de otimização é:

$$\min_{K(s)} \|S\|_\infty$$

onde $K(s) \in \mathcal{CE}_G$. Será que conseguimos encontrar algum algoritmo prático que forneça tal controlador ?

Mesmo antes de resolver este problema, podemos concluir algumas coisas:

1. Já sabemos que em geral $|S(j\omega)|$ deverá assumir valores próximos de 1 em algumas faixas de frequência, pois senão o sistema em malha fechada não teria bom desempenho (não rejeitaria bem os ruídos de medida). Então podemos dizer que $\|S\|_\infty$ tende a ser maior que 1.

2. É muito comum que $|S(j\omega)|$ tenha picos de ressonância. Para alguns casos, quando a planta é de fase não-mínima ou instável, esses picos tendem a ser maiores ainda, ou seja, por mais que se busque uma solução ótima, há limites inferiores para $\|S\|_\infty$ (isto será melhor visto na parte sobre restrições de desempenho). Não é incomum portanto que $\|S\|_\infty > 1$.

4.2 Problemas de Otimização Precursores

O problema acima ainda não está completo. Se assumirmos que conseguirmos achar uma resposta a esse problema de otimização, ele somente seria um controlador o mais robusto possível (em termos de estabilidade), mas não atenderia nenhuma especificação de desempenho.

4.2.1 Inclusão de Especificação de Desempenho

A Eq. (1.2), que relaciona o erro teórico com o sinal de referência, é:

$$E_t = -SR + SG_dD - TN, \quad (4.1)$$

Deste modo, a função sensibilidade S relaciona o erro com referência e erro com distúrbio. Deste modo, o desempenho desejado para o sistema em MF deve ser traduzido em um formato adequado para $|S(j\omega)|$. Como foi dito, deseja-se que $|S(j\omega)| < \epsilon_1$ abaixo de uma certa frequência ω_a , onde $\epsilon_1 > 0$ é bem pequeno, para se ter atenuação de distúrbios bem como pequeno erro estacionário. Acima de uma frequência $\omega_b > \omega_a$, deseja-se que $|S(j\omega)| \rightarrow 1$ de modo a ter $|T(j\omega)| < \epsilon_2$, com $\epsilon_2 > 0$ bem pequeno, de modo a atenuar o ruído de medição.

A estratégia adotada em controle H_∞ consiste em impôr um limite superior para $|S(j\omega)|$ em cada frequência, da forma:

$$|S(j\omega)| < 1/|W_p(j\omega)|, \quad (4.2)$$

onde $W_p(j\omega)$ é estável e tem uma característica passa-baixas (ao se inverter essa função, torna-se um passa-altas). Esta função $W_p(j\omega)$ é conhecida como *função peso de desempenho*. Se passarmos multiplicando a função peso em (4.2), teremos:

$$|S(j\omega)||W_p(j\omega)| = |S(j\omega)W_p(j\omega)| < 1 \quad (4.3)$$

De fato, a condição (4.3) seria automaticamente atendida se $\|SW_p\|_\infty < 1$. Será então que não seria mais razoável buscar solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{K(s)} \|SW_p\|_\infty \quad (4.4)$$

onde $K(s) \in \mathcal{CE}_G$?

De fato, se o algoritmo de otimização retornasse um controlador $K(s)$ tal que $\|SW_p\|_\infty < 1$, ou próximo disso, estaríamos satisfeitos, pois assim as especificações estariam garantidas. Mas este sistema não teria mais robustez de estabilidade máxima, porque passamos a ponderar os valores de $|S(j\omega)|$. Entretanto, escolhas adequadas de $W_p(j\omega)$ podem fazer $\|S\|_\infty$ pequeno o suficiente para se ter boa robustez de estabilidade.

4.2.2 Soluções subótimas

Achar um controlador $K^*(s)$ que resolva o problema de otimização em (4.4) é uma tarefa computacionalmente muito complicada. De fato, pode ser provado que o tempo que um algoritmo levaria para encontrar a solução tende a infinito. Entretanto, uma *solução subótima*, na grande maioria dos casos, é mais que suficiente para os nossos objetivos.

De fato, se γ_{\min} é o mínimo atingido pela função $\|SW_p\|_{\infty}$, para qualquer valor $\gamma > \gamma_{\min}$ temos uma solução subótima. Pode-se mostrar, em uma solução subótima, que:

$$|S(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_p(j\omega)|}$$

de modo que se acharmos um $K(s)$ tal que $\gamma \simeq 1$, as especificações estariam parcialmente atendidas.

Deste modo, precisamos de um algoritmo que forneça uma solução subótima para o problema, e não necessariamente a solução ótima. O que veremos é que existe um algoritmo, a ser apresentado mais adiante, que fornece sucessivas soluções subótimas que vão aproximando de γ_{\min} e que teoricamente convergiria para ele.

4.2.3 Funções Peso de Desempenho Típicas

Para que as especificações de desempenho sejam atingidas no projeto ótimo H_{∞} , é necessário que, ao final, $|S(j\omega)|$ esteja abaixo de $|W_p^{-1}(j\omega)|$, como está representado na Fig. 4.1, o que é equivalente a dizer que foi achado um controlador $K^*(s)$ tal que $\|W_p S^*\|_{\infty} < 1$.

A função peso representada na Fig. 4.1 é chamada de primeira ordem, pois possui apenas um pólo e um zero. Note que na figura está representada a inversa (na verdade, as suas assíntotas). Esta função tem a expressão matemática dada por:

$$W_p(s) = \frac{\frac{s}{M} + \omega_b^*}{s + A\omega_B^*}$$

Neste caso, os parâmetros têm uma interpretação bastante simples:

1. Para baixas frequências, o ganho de $W_p(s)^{-1}$ é aproximadamente A . Portanto, quando menor fizermos este parâmetro, menor estamos querendo $|S(j0)|$, e portanto, menor o erro estacionário.
2. Para altas frequências, o ganho de $W_p(s)^{-1}$ é aproximadamente M . Quanto menor fizermos este valor, menor estamos querendo $\|S\|_{\infty}$, o que acaba implicando em um sistema menos oscilatório (e maior robustez de estabilidade). Entretanto, é preciso lembrar que valores pequenos de $\|S\|_{\infty}$ (próximos ou abaixo de 1) podem não ser viáveis por restrições de desempenho (sistemas de fase não-mínima ou instáveis).
3. Para médias frequências, o parâmetro ω_B^* determina o comportamento. Como se pode ver na Fig. 4.1, o valor da banda-passante de S (ou seja, ω_B) vai tender a estar entre $A\omega_B^*$ e $M\omega_B^*$ se as especificações forem atendidas, de modo que quanto maior ω_B^* , maior tende a ser ω_B . Com isto, quanto melhor queremos que seja a fidelidade do sistema (capacidade de seguir os sinais de referência e rejeitar distúrbios), maior fazemos ω_B^* .

Deste modo, com estes três parâmetros A , M e ω_B^* , podemos especificar bem um sistema de controle em malha fechada, pois podemos impor um erro estacionário ao degrau tão pequeno quanto se queira, especificar regime transitório e robustez de estabilidade [SP05].

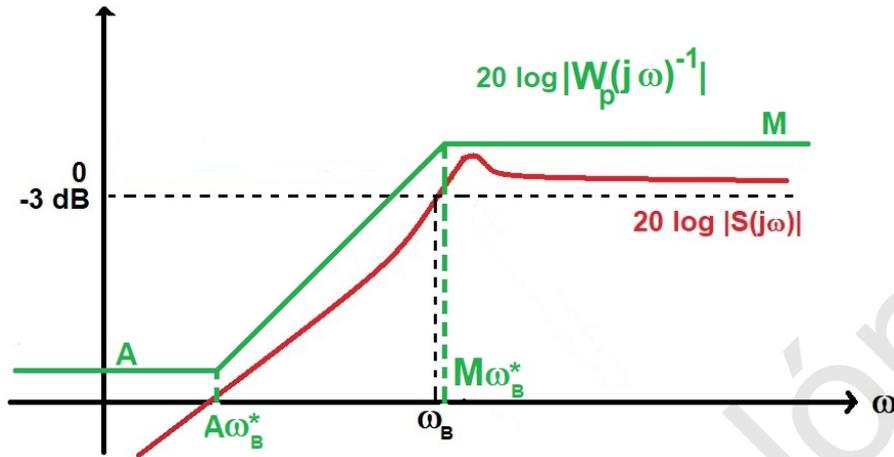


Figura 4.1: Função Peso de Desempenho de Primeira Ordem e Função S

4.2.4 Funções Peso de Controle

Outra vantagem, como já foi dito, da metodologia H_∞ é que podemos levar em conta no projeto o esforço de controle. Conforme vimos anteriormente em (1.3), o sinal de controle no sistema em malha fechada é dado por:

$$U = KS(R - G_d D - N),$$

ou seja, se queremos que o esforço de controle seja pequeno, ou para não saturar os atuadores, ou para economizar energia, devemos também ponderar a função de transferência $K(s)S(s)$. Podemos então adotar a mesma técnica da função peso (agora, *função peso de controle*) de modo que:

$$|K(j\omega)S(j\omega)| < \frac{1}{|W_u(j\omega)|}$$

o que é equivalente a $\|KSW_u\|_\infty < 1$.

Se queremos que o sinal de controle tenha pouca energia de controle nas altas frequências, fazemos com que $|W_u(j\omega)|$ seja alto nestas frequências, e vice-versa.

4.3 Problema de Sensibilidade Mista S/KS

Conforme foi dito, o que se pode obter na prática (através de um algoritmo que será apresentado mais adiante) é um controlador subótimo $K(s)$ que corresponde a um valor $\|SW_p\|_\infty = \gamma > \gamma_{\min}$. Entretanto, nada impede que este controlador possa gerar sinais de controle $u(t)$ com valores muito altos e que gastam uma quantidade ilimitada de energia. Deste modo, a restrição $\|W_u KS\|_\infty < 1$ deve ser juntada ao problema.

Mostra-se que podemos incluir esta restrição no funcional a ser minimizado da seguinte forma:

Seja a matriz de funções de transferência:

$$N(j\omega) = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u KS \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

Pode-se mostrar que, para matrizes deste tipo, tem-se que:

$$\|N\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{|W_p(j\omega)S(j\omega)|^2 + |W_u(j\omega)K(j\omega)S(j\omega)|^2}, \quad (4.6)$$

de modo que se garantirmos que $\|N\|_\infty < 1$, teremos as especificações satisfeitas, bem como robustez de estabilidade. Como estamos buscando soluções subótimas, tal que $\|N\|_\infty < \gamma$, e quanto mais próximo γ for do valor um, melhor. Nesta situação, tem-se que

$$|S(j\omega)| < \gamma/|W_b(\omega)|$$

e

$$|KS(j\omega)| < \gamma/|W_u(\omega)|$$

Há algoritmos que buscam, o sub-ótimo de forma iterativa, com algum critério de parada. Eventualmente, após várias iterações, γ pode ficar próximo de um, ou até menor (quem sabe até chegue próximo do ótimo), o que também satisfaz as especificações. Se, por outro lado, o melhor valor de γ a que se chegar for muito acima de um, há algum problema com as especificações, pois não podem ser atendidas num tempo razoável. O algoritmo de Doyle, como apresentado em [ZD98] busca encontrar um controlador na forma de realimentação de estados com observador, através da solução de duas *equações algébricas de Riccati* (ARE), que será estudado com mais detalhes mais adiante. Entretanto, há também a abordagem por *desigualdades matriciais lineares* (ou LMI) que é bastante popular [DP13].

4.4 Exemplo Completo de Projeto

Neste exemplo, iremos resolver com mais detalher o problema 2.17 do livro do Skogestad, segunda edição, versão 2005 (pag. 64). Deseja-se resolver o problema de sensibilidade mista S/KS , onde se dá um formato adequado para a função sensibilidade S , assim como na função de transferência KS do sinal de controle. Iremos usar a função `mixsyn` do Matlab Robust Control Toolbox[®].

Descrição da Planta

Seja a planta dada pela função de transferência

$$G(s) = \frac{200}{0.025s^3 + 1.002s^2 + 10.1s + 1}$$

que é uma planta de terceira ordem e de fase mínima. Os correspondentes diagramas de Bode são apresentados na figura 4.2.

Supondo realimentação unitária e controlador unitário, ou seja $K(s) = 1$, nota-se que a frequência de cruzamento de fase é $\omega_{180} = 20.1$ rad/s, a margem de ganho é $GM = 6.11$ dB, a frequência de cruzamento de ganho é $\omega_c = 13.6$ rad/s e a margem de fase é $PM = 21.8$ graus. Como não estamos considerando modelo de incertezas na planta, vamos usar as especificações clássicas de robustez de estabilidade, que recomendam $30 < PM < 60$ graus e $GM > 6$ dB.

As funções de transferência em malha fechada $S(s)$ (função sensibilidade) e $T(s)$ (função sensibilidade complementar), são apresentadas na figura 4.3. Nota-se que $\|S\|_\infty = 10.2$ dB, o que está acima do valor recomendado classicamente (que deve ser no máximo 6 dB) e $\|T\|_\infty = 9.02$ dB, (que deve ser no máximo 2 dB).

A banda passante retirada de $S(s)$ é dada por $\omega_B = 8.65$ rad/s, e a resposta ao degrau é apresentada na figura 4.4. Espera-se que uma diminuição do valor de $\|S\|_\infty$ vá diminuir a porcentagem de sobressinal (que está acima de 50%).

Diagramas de Bode de $G(s)$

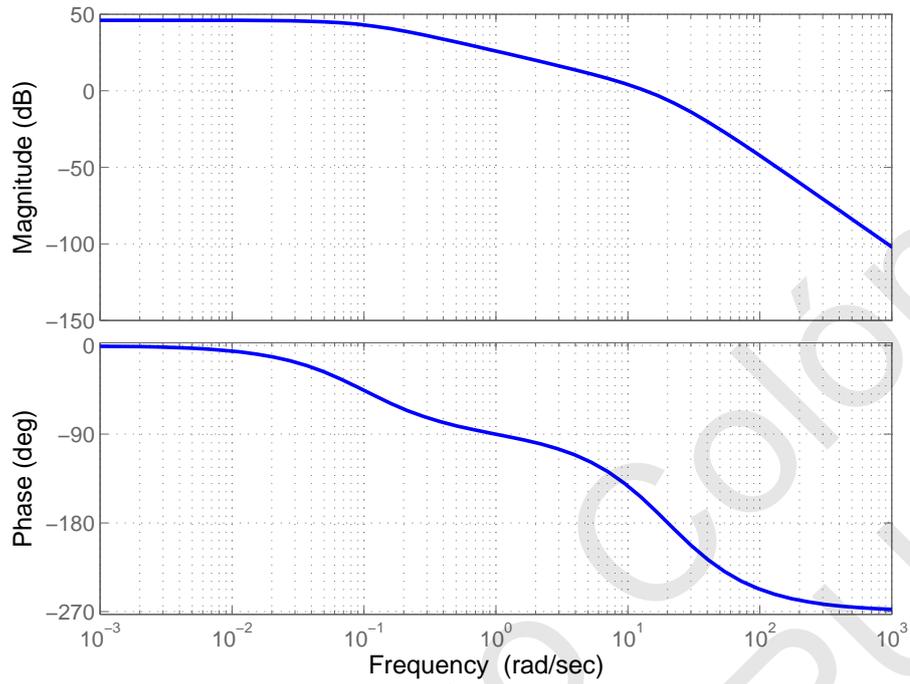


Figura 4.2: Diagramas de Bode da Planta $G(s)$

Diagrama de $S(s)$ e $T(s)$ com Controlador Unitário

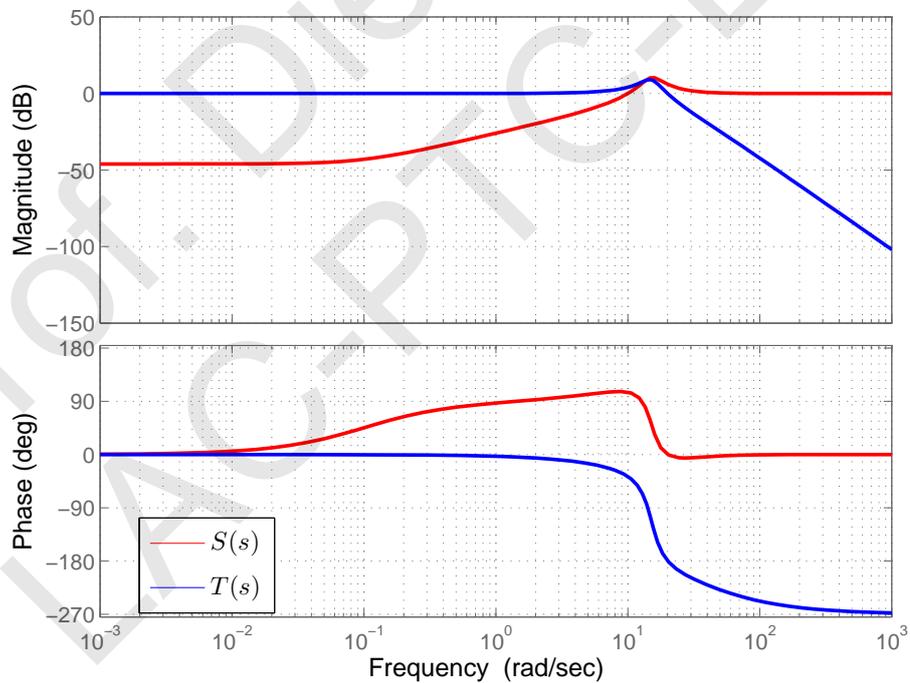


Figura 4.3: Diagramas de Bode de $S(s)$ e $T(s)$

Primeiro Projeto

Vamos inicialmente propor a função peso $W_p(s)$ proposta como no exemplo do Skogestad, onde $A = 0.0001$, $M = 1.5$ e $\omega_B^* = 10$. Neste caso, o novo valor em baixas frequências de $|S|$

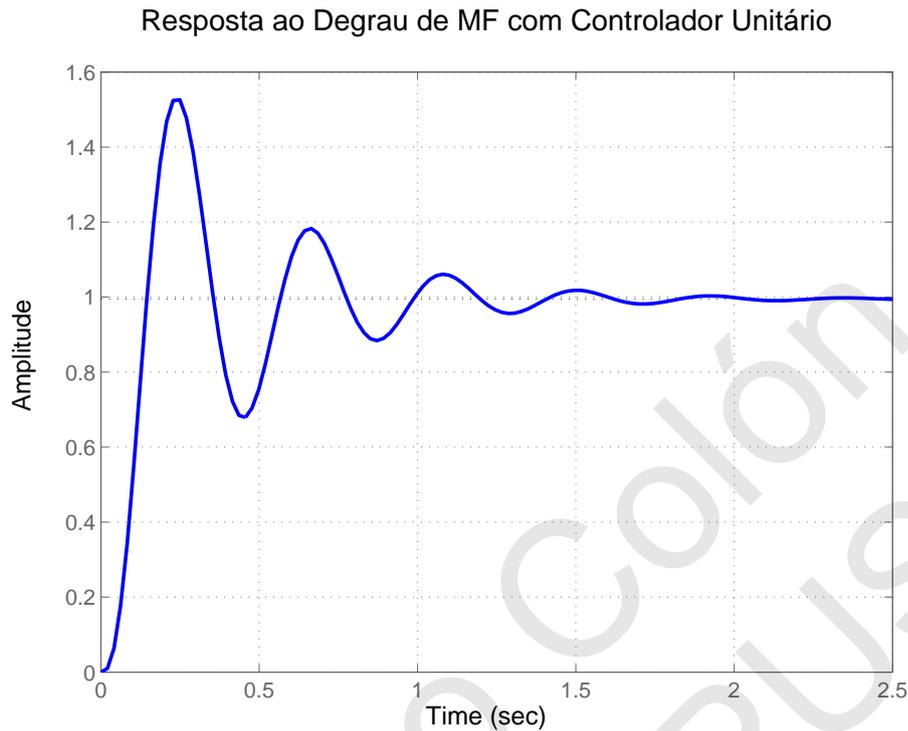


Figura 4.4: Resposta ao Degrau para o sistema em MF

será $20 \log A = -80 \text{ dB}$ e o máximo valor será de $20 \log M = 3.52 \text{ dB}$. Estas especificações implicam que a banda passante será um pouco maior que a do sistema original (com controle unitário), um erro estacionário menor e $\|S\|_\infty$ limitado superiormente por 3.52 dB . Além disso, vamos especificar que $W_u \equiv 1$, o que vai limitar superiormente a função $|KS(j\omega)|$ em γ .

Os diagramas de Bode da função sensibilidade original e da função peso com as especificações são apresentados na figura 4.5.

Após aplicar o algoritmo, o valor atingido de $\gamma = 1.37$, de modo que as especificações não vão ser exatamente agindidas, entretanto, veremos que o resultado não ficou tão ruim. O valor $\|S\|_\infty$ ficou 2.29 dB , como pode ser verificado na figura 4.6. A banda passante ficou $\omega_B = 5.74 \text{ rad/s}$, o que é inferior ao que era anteriormente (o que vem do fato de γ maior que um). A margem de ganho resultou em 27.8 dB , com $\omega_{180} = 35.4 \text{ rad/s}$ e a margem de fase resultou em 71.1 graus com $\omega_c = 7.2 \text{ rad/s}$.

Na figura 4.7 tem-se os diagramas de Bode para para a função sensibilidade complementar.

Na figura 4.8 tem-se os diagramas de Bode para a função de transferência em malha aberta $L(s)$. Nota-se que para atender a especificação de menor erro em regime estacionário, o ganho nas baixas frequências acabou sendo aumentado. Desta e das figuras anteriores, também se vê que o controlador tem um excesso de pólos igual a um, de modo que não se trata de nenhum controlador clássico.

Na figura 4.9 tem-se os diagramas de Bode para função de transferência KS . Nota-se que o limite superior de $\gamma = 1.37$ (que representa um ganho de 2.73 dB foi respeitado, entretanto as especificações não foram atendidas exatamente.

O Controlador projetado tem a função de transferência na equação 4.7. Nota-se que o controlador tem ganho alto nas baixas frequências.

Diagrama de Bode de $S(s)$ e Função Peso Inversa

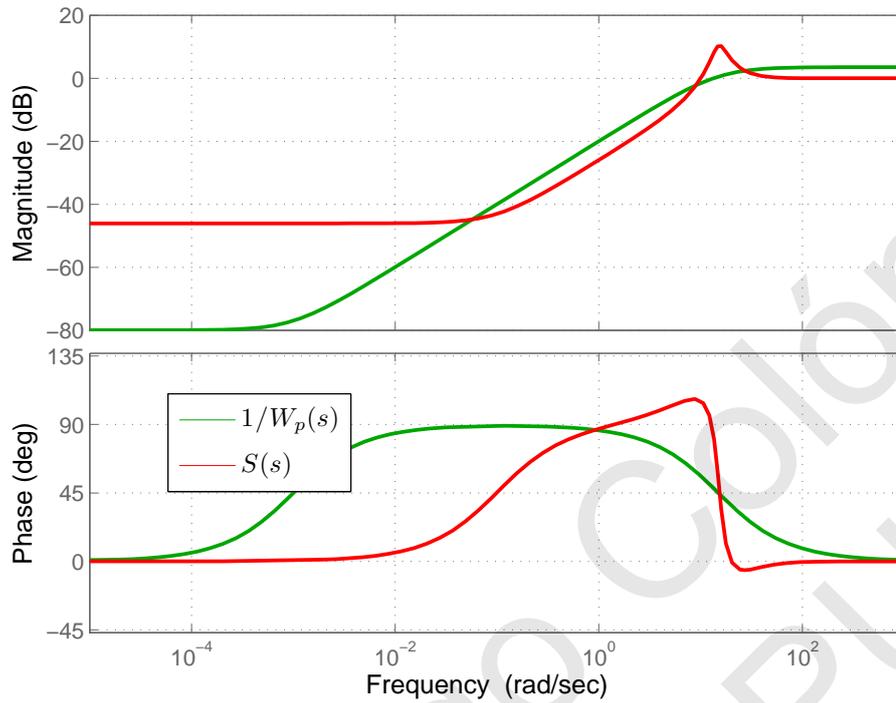


Figura 4.5: Diagramas de Bode de $S(s)$ e da função peso.

Função Sensibilidade $S(s)$

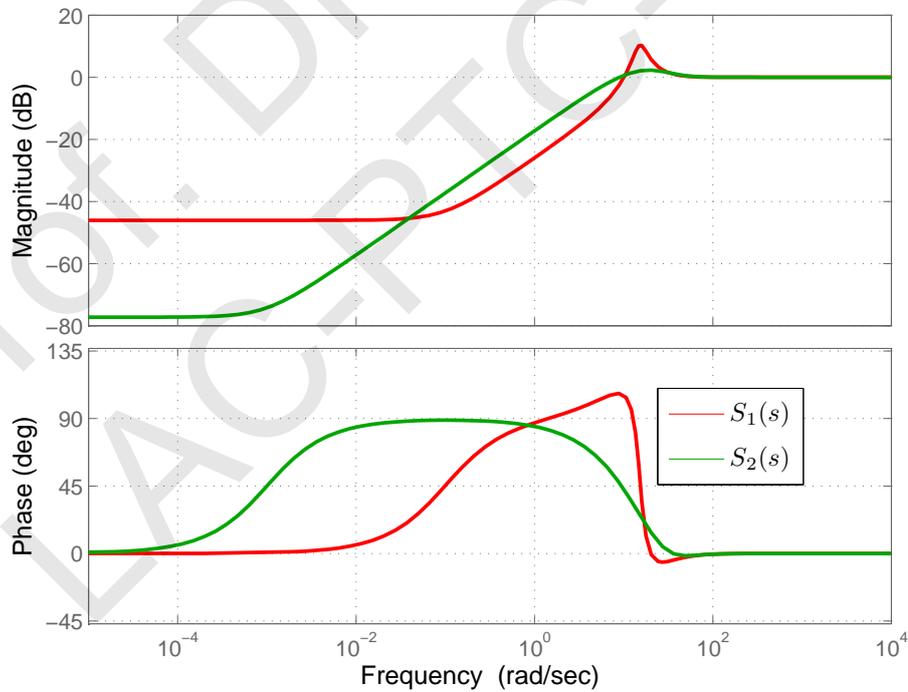


Figura 4.6: Diagramas de Bode das Funções Sensibilidade antiga e nova.

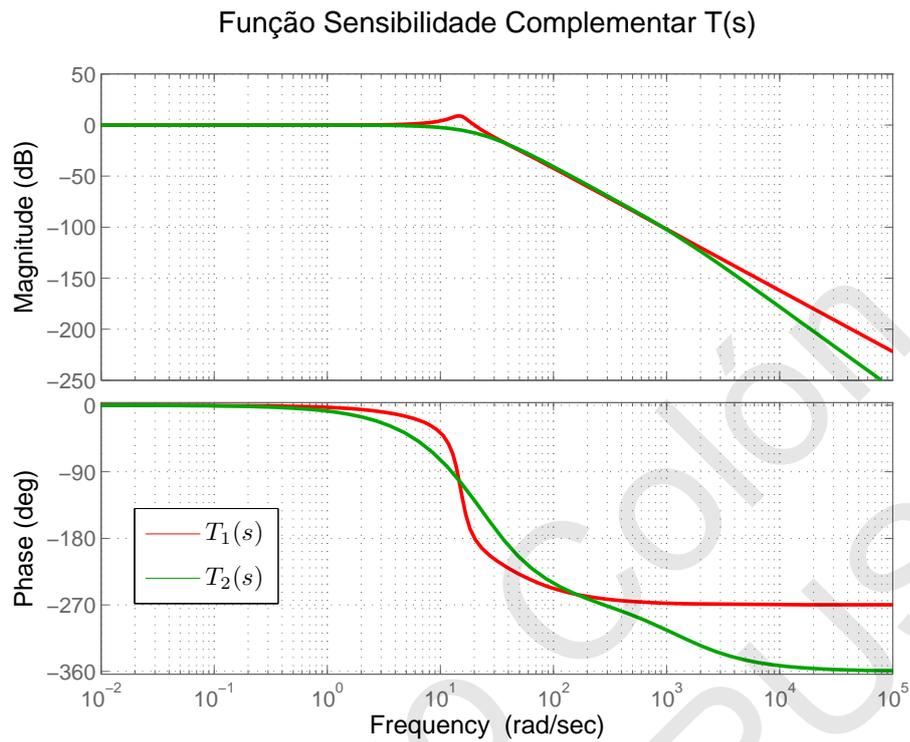


Figura 4.7: Diagramas de Bode de $T(s)$ velho e novo.

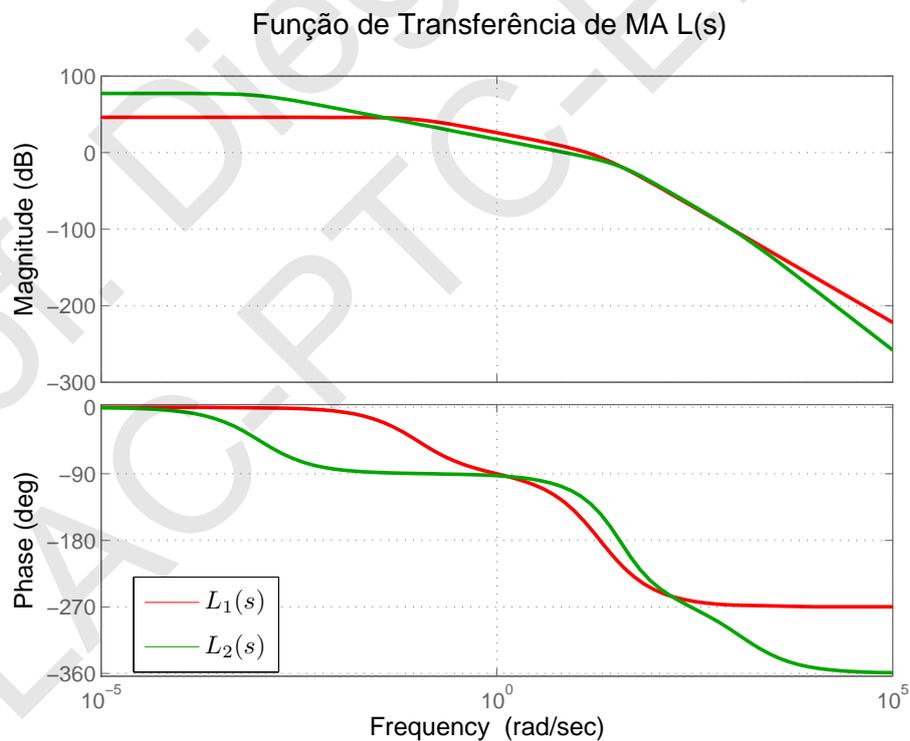


Figura 4.8: Diagramas de Bode de $L(s)$ velho e novo.

$$K(s) = \frac{1569.4523(s + 20)^2(s + 0.1)}{(s + 1311)(s + 0.001)(s^2 + 58.96s + 1313)} \quad (4.7)$$

Função de Transferência de MF de Controle KS

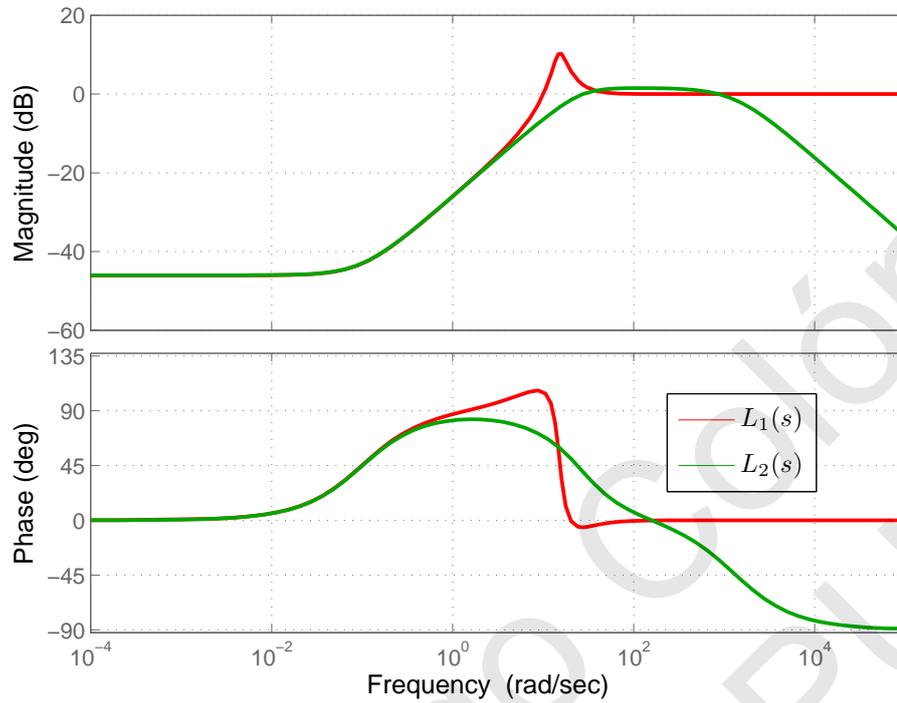


Figura 4.9: Diagramas de Bode de $L(s)$ velho e novo.

e os diagramas de Bode são apresentados na figura 4.10.

Diagrama de Bode de $K(s)$ ótimo H Infinito

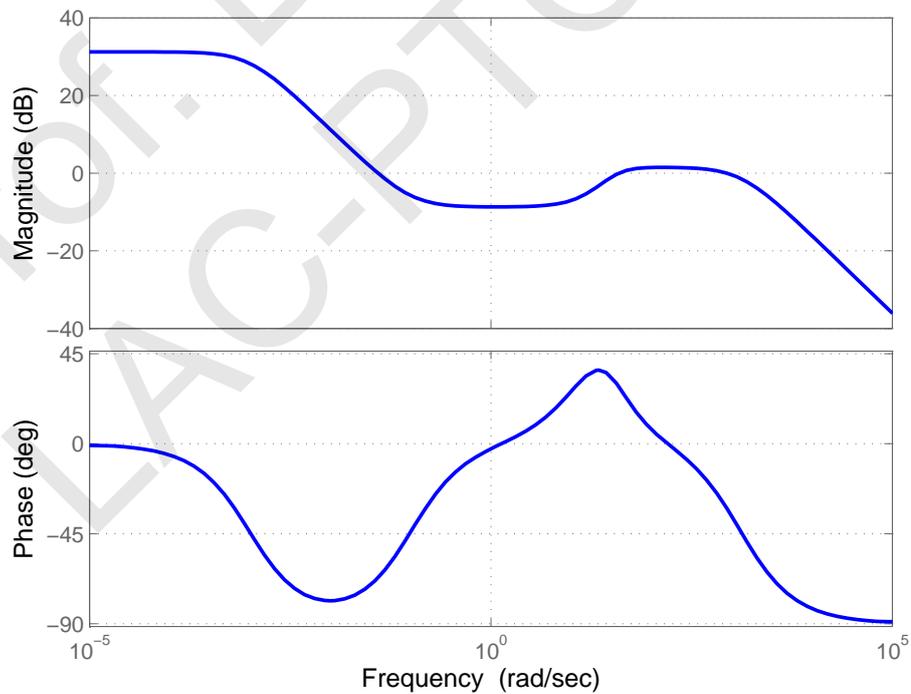


Figura 4.10: Diagramas de Bode de $K(s)$.

Na figura 4.11 tem-se a resposta ao degrau para o sistema antigo e o sistema novo. Nota-se que o sobressinal foi eliminado. Nota-se que o sistema ficou mais lento. Na figura 4.12 tem-se a resposta ao degrau de distúrbio na entrada $d(t)$. Nota-se que a influência é bastante reduzida, apesar de não se estar usando integrador no controlador. Porém o ganho deste é bastante alto nas baixas. Na figura 4.13 tem-se o sinal de controle para a resposta ao degrau de referência.

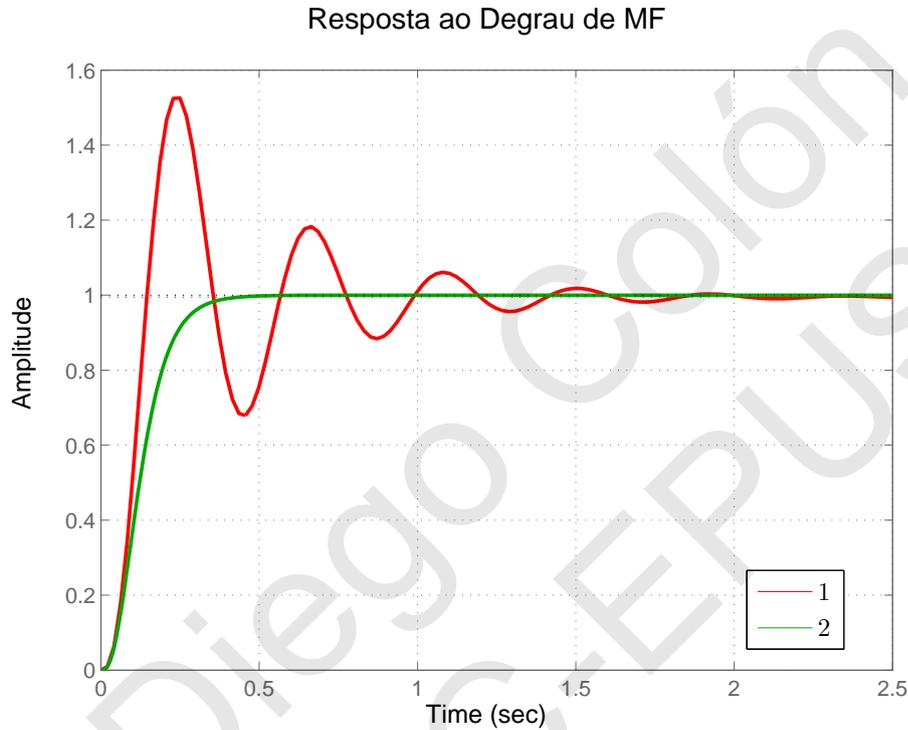


Figura 4.11: Resposta ao Degrau de Referência.

Segundo Projeto

Queremos agora uma banda passante próxima de $\omega_B^* = 100$, o que vai permitir uma resposta muito mais rápida do sistema. Mantendo-se então os outros parâmetros de projeto como estavam, o que se nota é que esta banda passante não é atingida, devido ao peso excessivo que se está dando na função KS nestas condições. Neste caso, o valor de γ resultou em 6.0730, o que mostra que as especificações ficaram longe de serem atendidas.

Após se reduzir W_u para 0.001 e aumentar M para 3, obtivemos um projeto que tem a banda passante próxima do valor desejado. O peso do controle tinha que ser diminuído, já que uma mudança tão drástica na dinâmica do sistema exige um consumo de energia nas altas frequências bem maior do que os sistemas anteriores poderiam fornecer. Neste novo projeto, o valor de γ resultou em 1.0249, de modo que neste caso as especificações são bem próximas de serem atendidas.

Na figura 4.14, tem-se a função sensibilidade atual e a inversa da função peso $W_P(s)$, que guarda as especificações desejadas para o sistema em MF.

O diagrama de Bode do novo controlador é apresentado na figura 4.15. Nota-se que o controlador tem característica de avanço-atraso, porém há um pólo em excesso.

A expressão do controlador é:

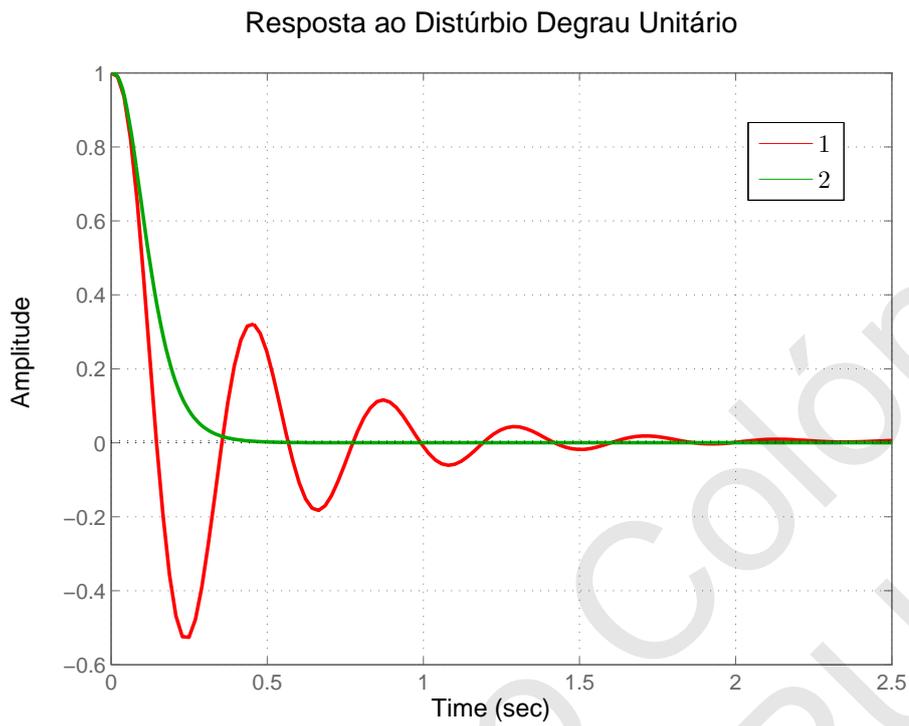


Figura 4.12: Resposta ao Degrau de Distúrbio.

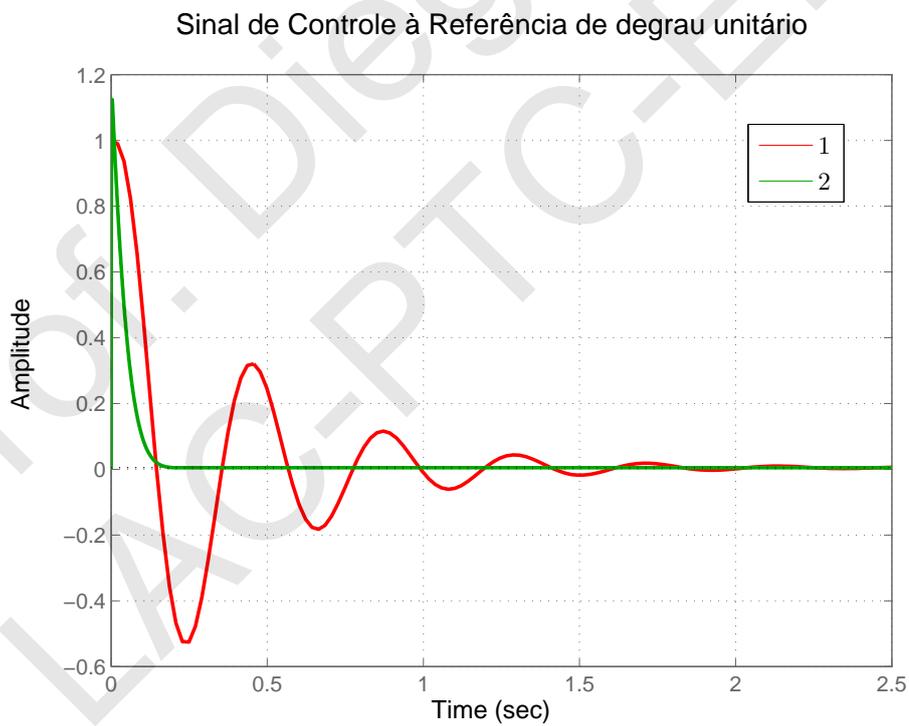


Figura 4.13: Sinal de Controle para Resposta ao Degrau de Referência.

$$K(s) = \frac{25051261.7199(s + 20)^2(s + 0.1)}{(s + 24440)(s + 0.01)(s^2 + 421.5s + 8403)}$$

Diagrama de Bode de $S(s)$ e Função Peso Inversa

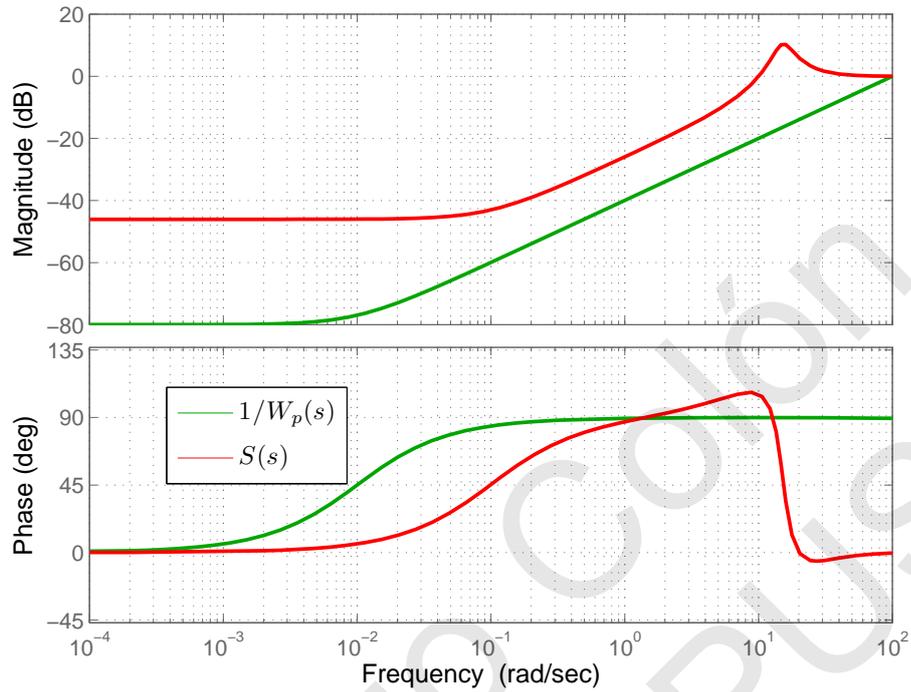


Figura 4.14: Função $S_1(s)$ e Inversa da Função Peso

Diagrama de Bode de $K(s)$ ótimo H Infinito

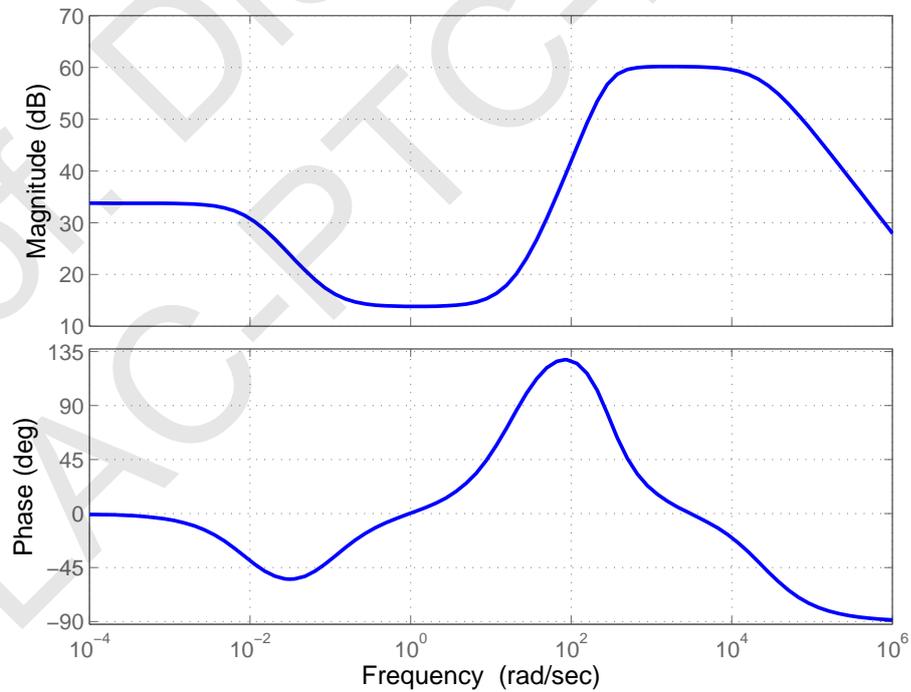


Figura 4.15: Diagramas de Nyquist Logarítmicos

Os diagramas de Nyquist logarítmicos de $L_1(s)$ e $L_2(s)$, ou seja, das funções de

transferência em MA para o controlador unitário e controlador sub-ótimo H_∞ são exibidos na figura 4.16. Nota-se que a estabilidade em MF existe em ambos os casos, porém o caso $L_2(s)$ tem maior robustez de estabilidade, pois a distância $|1 + L|$ é sempre maior neste caso.

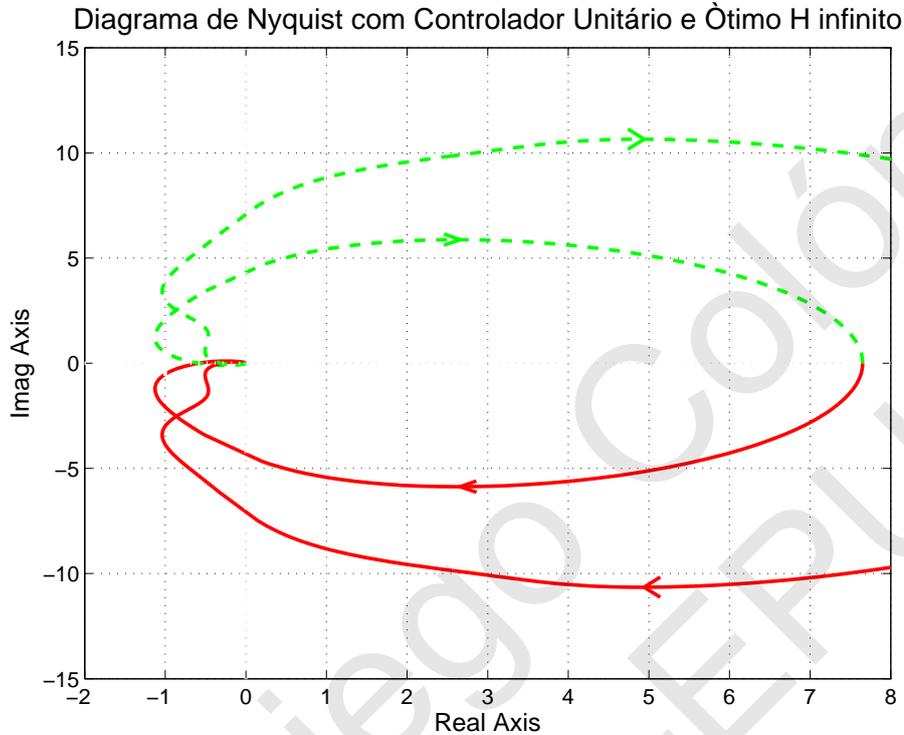


Figura 4.16: Função $K(s)$

As funções sensibilidade $S_1(s)$ e $S_2(s)$ são apresentadas na figura 4.17. Neste caso, tem-se que $\|S\|_\infty = 3.52$ dB, o que atende as especificações clássicas. A banda passante fica em torno de $\omega_B = 70$ rad/s.

As funções de transferência em malha aberta são apresentadas na figura 4.18. Para a função de transferência $L_2(s)$ tem-se $\omega_{180} = 287$ rad/s e a correspondente margem de ganho é $GM = 12.5$ dB. A correspondente margem de fase é $PM = 60.7$ graus, na frequência de cruzamento de ganho $\omega_c = 95.2$ rad/s, o que representa parâmetros clássicos mais interessantes.

As funções sensibilidades complementares $T_1(s)$ e $T_2(s)$ são apresentadas na figura 4.19. No caso do controlador sub-ótimo H_∞ , tem-se que não há pico de ressonância em $T_1(s)$, e $\|T\|_\infty = 1$ dB.

A resposta ao degrau em Malha Fechada é apresentada na figura 4.20. Nota-se que para o sistema sub-ótimo H_∞ o sobressinal é bem reduzido, e o tempo de subida é bem menor que no caso de controlador unitário. Na figura 4.21, tem-se a resposta ao degrau de distúrbio $d(t)$ (lembre-se que $G_d(s) \equiv 1$). Nota-se que o distúrbio é mais rapidamente atenuado no caso ótimo do que no unitário.

Na figura 4.22, tem-se o diagrama de Bode da função de transferência $K(s)S(s)$ na figura 4.22. Nota-se que o ganho é maior nas faixas de frequência entre 100 rad/s e 500 rad/s, que é necessário para se gerar o sinal de controle mostrado na figura 4.23, que mostra o sinal de controle para o degrau nos dois casos. Nota-se que a amplitude do sinal de controle ficou muito grande no caso sub-ótimo, o que não é interessante. O valor

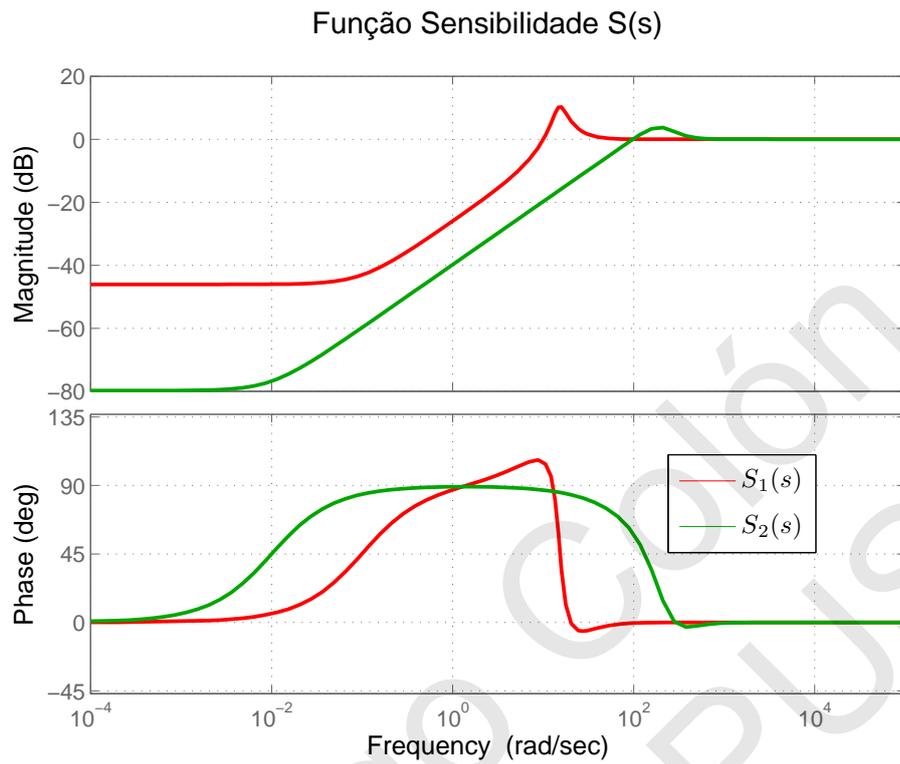


Figura 4.17: Funções Sensibilidade $S_1(s)$ e $S_2(s)$

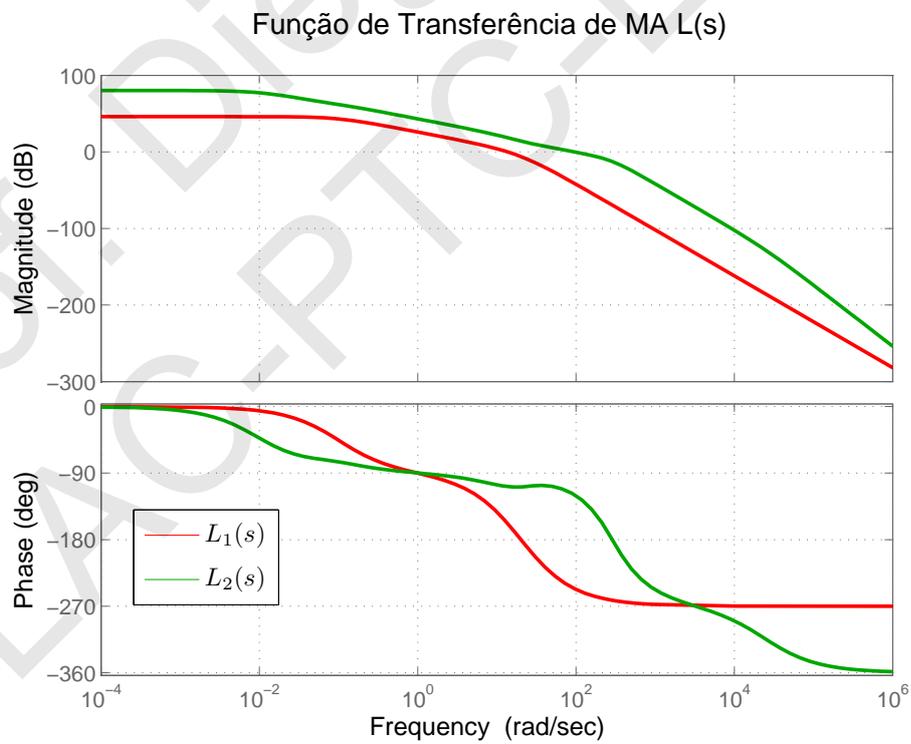


Figura 4.18: Função de Transferência em Malha Aberta $L_1(s)$ e $L_2(s)$

de $\gamma = 1.0249$.

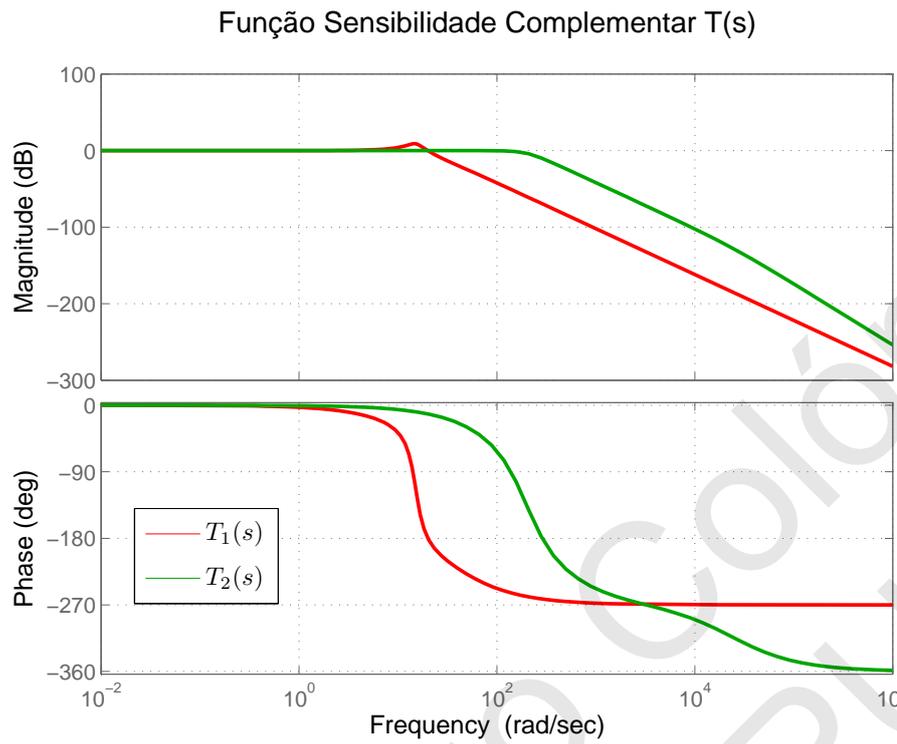


Figura 4.19: Funções Sensibilidade Complementar $T_1(s)$ e $T_2(s)$

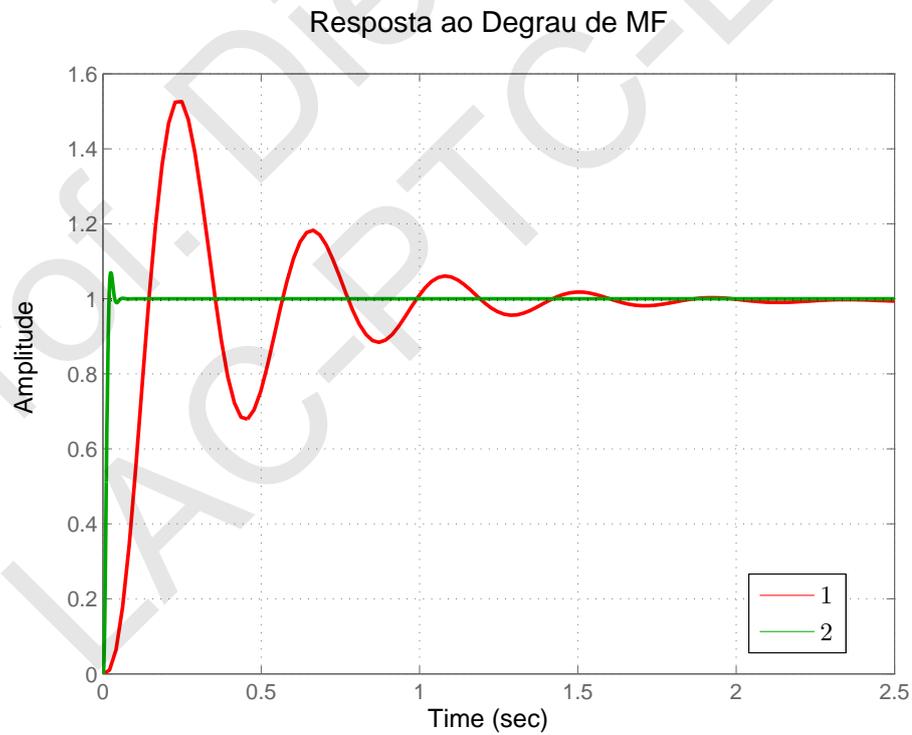


Figura 4.20: Resposta ao Degrau

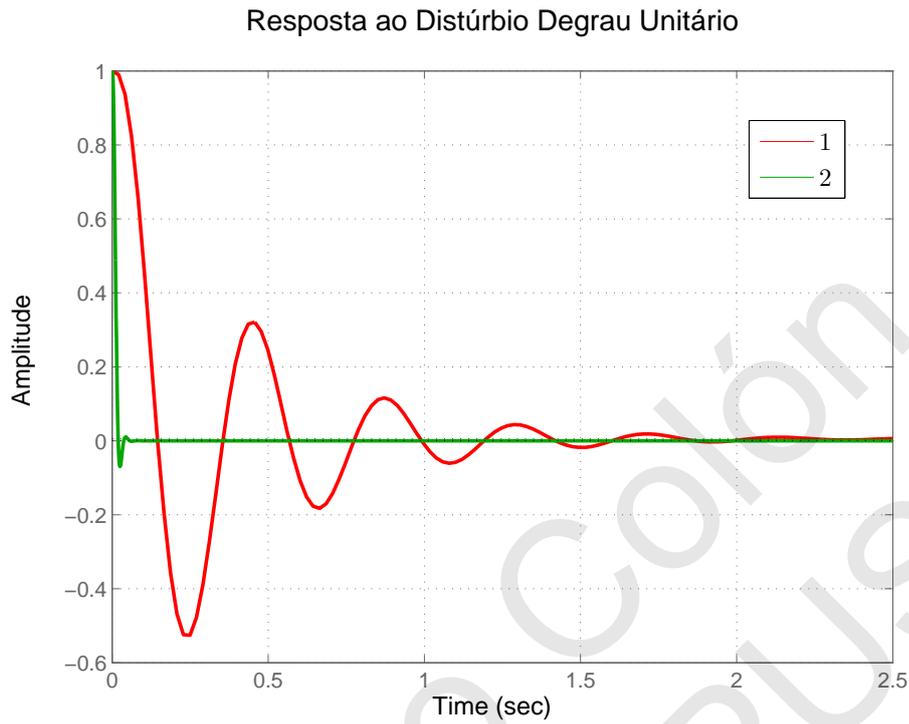


Figura 4.21: Resposta ao Degrau de Distúrbio

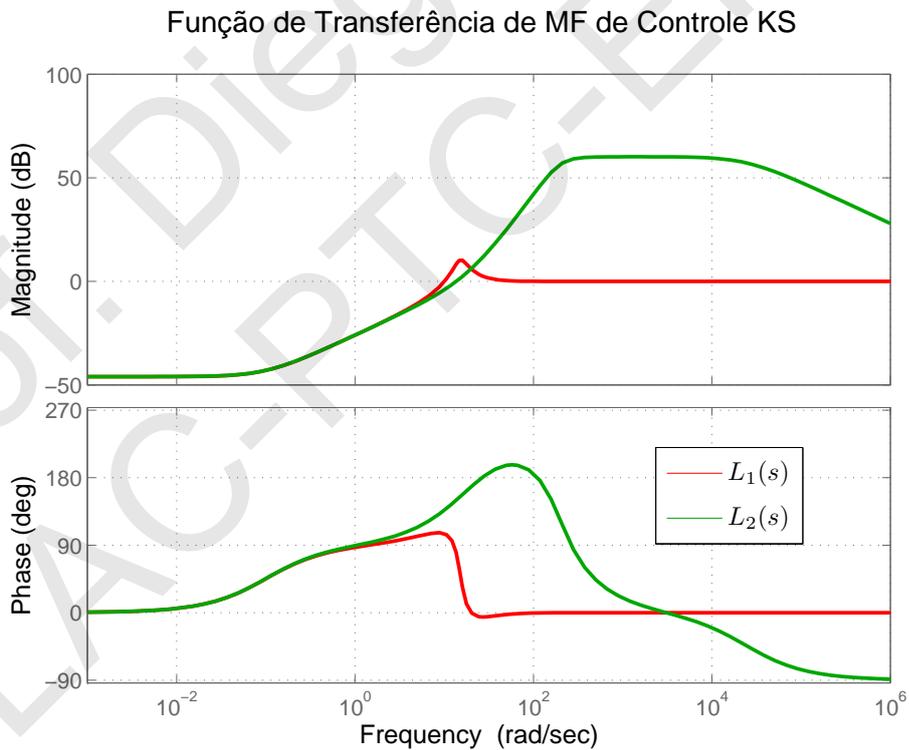


Figura 4.22: Funções de transferência K_1S_1 e K_2S_2

4.5 Restrições de Desempenho

Vimos que um valor alto de $\|S\|_\infty$ indica baixa robustez mas também baixo desempenho, pois isto indica que $\|T\|_\infty$ também é alto. Infelizmente, não é possível eliminar o pico de S

Sinal de Controle à Referência de degrau unitário

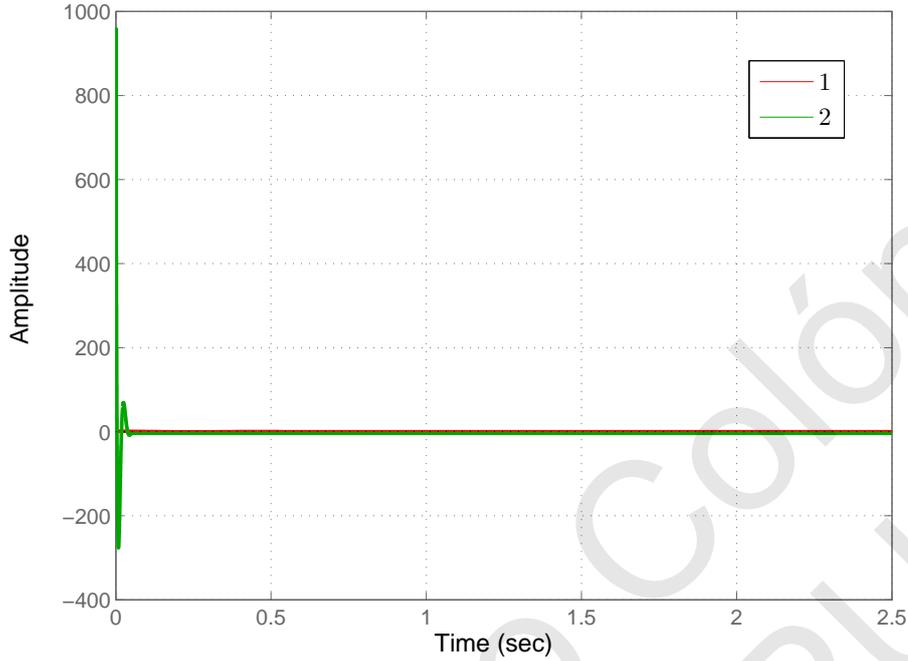


Figura 4.23: Sinais de Controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$

na maioria dos problemas práticos. De fato, se $n - m \geq 2$, temos que o gráfico de Nyquist de $L(j\omega)$ entra no círculo unitário ao redor de -1 , ou seja, $|1 + L| < 1$, o que implica que $\|S\|_\infty > 1$. Além disso, exceto pelo caso onde $n - m = 0$, tem-se que $|1 + L| \rightarrow \infty$ para $\omega \rightarrow \infty$, o que implica que $|S(j\omega)| \rightarrow 1$.

Além disso, existem outros resultados que vinculam fortemente o comportamento da função S quando o sistema é de fase não-mínima e/ou instável.

Teorema 4.5.1 (Integral de Sensibilidade de Bode, ou Primeiro Teorema do "Colchão de Água"). *Seja $L(s)$ racional e $n - m \geq 2$. Suponha ainda que $L(s)$ tem N_p pólos no semi-plano direito (SPD) nas posições p_i , onde $i = 1, \dots, N_p$. Então, vale que:*

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} \Re(p_i)$$

Para entender todas as implicações deste teorema, é necessário analisar alguns casos possíveis. Na Fig. 4.24 tem-se o gráfico de duas funções $\ln |S_1(j\omega)|$ e $\ln |S_2(j\omega)|$ (a escala no eixo das frequências é linear). Nestes casos, nenhuma das funções tem pólos no semiplano direito, o que significa que as áreas acima e abaixo do eixo real devem ser iguais. Para S_1 temos que a banda-passante é maior do que no caso S_2 , o que implica que a área negativa deve ser maior na primeira do que na segunda. Isto implica que a área positiva também deve ser maior na primeira do que na segunda. Deste modo, o pico de ressonância tende a ser maior também no caso da primeira.

Se L possui um polo real no semi-plano direito (por exemplo, p), então a integral fica:

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi p > 0$$

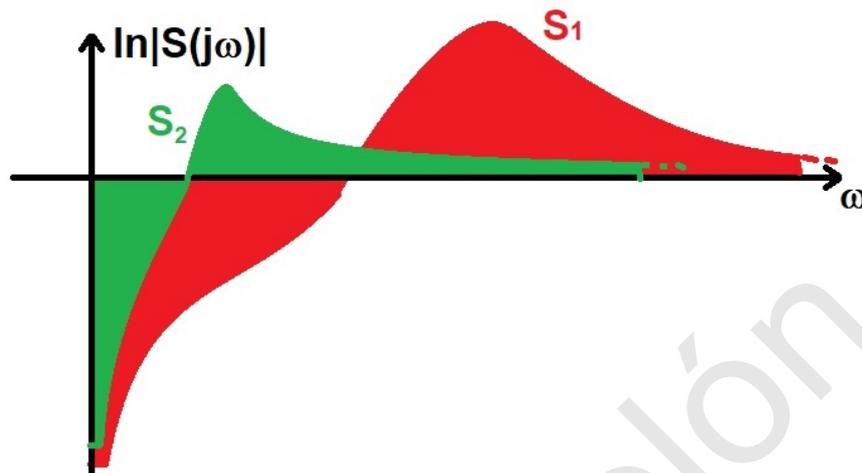


Figura 4.24: Exemplos para a integral de sensibilidade

Isso indica que o resultado da integral deve ser positivo, ou seja, o pico de S tende a ser maior ainda. Neste caso, atingir bom desempenho e boa robustez de estabilidade é ainda mais difícil do que no caso onde L é estável (por exemplo, no caso da planta ser de fase mínima). Além disso, quanto mais distante este polo do SPD estiver do eixo imaginário, maior tenderá a ser $\|S\|_\infty$. De tudo isso, podemos concluir que:

- Querer menor erro estacionário tende a aumentar $\|S\|_\infty$;
- Querer maior banda-passante (fidelidade) tende a aumentar $\|S\|_\infty$;
- Estabilizar uma planta instável tende a aumentar $\|S\|_\infty$ e todos os efeitos anteriores se acumulam com este;
- Querer boa robustez de estabilidade exige sacrifício de desempenho nominal.

Teorema 4.5.2 (Segundo Teorema do "Colchão de Água"). *Seja $L(s)$ tenha um zero real z ou dois zeros complexos conjugados $z, z^* = x \pm jy$ no SPD e ainda tenha N_p pólos no semi-plano direito (SPD) nas posições p_i , onde $i = 1, \dots, N_p$. Então, vale que:*

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| w(z, \omega) d\omega = \pi \ln \left(\prod_{i=1}^{N_p} \left| \frac{p_i + z}{p_i^* - z} \right| \right)$$

onde:

- Se z é real, então:

$$w(z, \omega) = \frac{2z}{z^2 + \omega^2}$$

- Se z, z^* é um par complexo conjugado, então:

$$w(z, \omega) = \frac{x}{x^2 + (y - \omega)^2} + \frac{x}{x^2 + (y + \omega)^2}$$

Para compreender as implicações deste teorema, vamos supor inicialmente que não há pólos no SPD e que z é real e tende para infinito (ou seja, $z \rightarrow \infty$). Neste caso, a função $w(z, \omega)$ se aproxima de uma constante com valor bem pequeno (mas positivo) $\epsilon > 0$. Então:

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)|w(z, \omega) d\omega \cong \epsilon \int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = 0$$

de modo que recuperamos a situação do primeiro teorema. À medida que z fica menor e se aproxima da origem pela direita, pesos maiores são dados para a faixa de área negativa do que a de área positiva. Para que a integral seja zero, é necessário que S tenha valores ainda maiores para a faixa de área positiva da integral (do que no caso de $z \rightarrow \infty$, ou seja, no caso de não haver zero). Quanto mais próximo o zero no SPD for do eixo imaginário, pior para a robustez de estabilidade. Para se ter uma ideia melhor, vide Fig. 4.25.

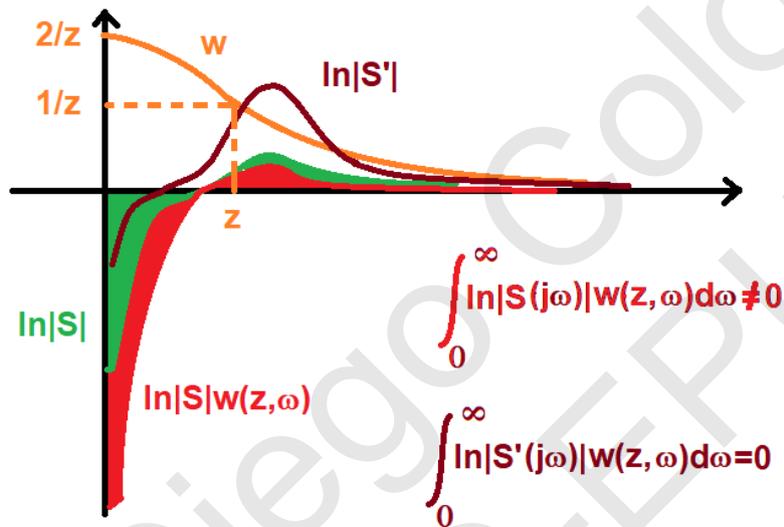


Figura 4.25: Segunda integral de Sensibilidade

No caso de haver um pólo p no SPD (além do zero, suposto aqui real z), tem-se que o teorema se reduz a:

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)|w(z, \omega) d\omega = \pi \ln \left| \frac{p+z}{p-z} \right|$$

o que significa dizer que, além de $|S(j\omega)|$ precisar ser maior no caso de haver z no SPD na faixa de área positiva (do que no caso de não haver), com a presença do pólo, $|S(j\omega)|$ precisa ser maior ainda nesta faixa. O caso extremo ocorre quando p está próximo de z , o que faz o lado direito da equação ficar muito grande (tentando ao infinito quando o pólo cancela com o zero no SPD). Em suma:

- Para sistemas de fase não-mínima, é mais difícil conseguir robustez e bom desempenho, e quando mais próximo o zero $z > 0$ estiver do eixo imaginário, mais difícil é;
- Sistemas instáveis e com zero no SPD são ainda piores de se conseguir robustez de estabilidade e bom desempenho;
- Sendo a planta instável ou não, não se recomenda usar um controlador de fase não-mínima, pois tende a ser pior em termos de desempenho e robustez de estabilidade.

- Se planta tiver pólo e zero no SPD (ou seja, nenhum deles pode ser removido), quanto mais próximos eles forem, pior tende a ser o desempenho e a robustez de estabilidade, sendo que no caso limite, nos aproximamos da situação de perda de estabilizabilidade.

4.5.1 Limites Mínimos

A seguir, apresentam-se limites mínimos para a função sensibilidade S e a sensibilidade complementar T .

- Se $W(s)$ é uma função peso, tem-se que se z é um zero no SPD da planta $G(s)$, então:

$$\|WS\|_{\infty} \geq |W(z)| \prod_{i=1}^{N_p} \frac{|p_i + z|}{|z - p_i|}$$

onde N_p é o número de pólos no SPD.

- Se $W(s)$ é uma função peso, tem-se que se p é um polo no SPD da planta $G(s)$, então:

$$\|WT\|_{\infty} \geq |W(p)| \prod_{i=1}^{N_z} \frac{|p + z_i|}{|z_i - p|} |e^{p\theta}|$$

onde N_z é o número de zeros no SPD e θ é um atraso de transporte.

Exemplo: Se uma planta $G(s)$ é tal que:

$$G(s) = \frac{e^{-0.5s}}{s - 3}$$

considerando $W(s) \equiv 1$, e como $p = 3$ e $\theta = 0.5$, então tem-se:

$$\|T\|_{\infty} \geq e^{1.5} = 4.48$$

o que implica que $\|S\|_{\infty} = \|T\|_{\infty} - 1 = 3.48$. Isto indica que, para esta planta, que é instável, não há como ter menos pico de ressonância do que 3.48.

Exemplo: Se uma planta $G(s)$ é tal que:

$$G(s) = 10 \frac{s - 2}{s^2 - 2s + 5}$$

como $z = 2$ e $p = 1 \pm j2$, tem-se que:

$$\|S\|_{\infty} \geq \frac{|2 + (1 + j2)| |2 + (1 - j2)|}{|2 - (1 + j2)| |2 - (1 - j2)|} = \frac{3^2 + 2^2}{1^2 + 2^2} = 2.6$$

Referências Bibliográficas

- [CBdR⁺14] Diego Colón, José M. Balthazar, Célia A. dos Reis, Átila M. Bueno, Ivando S. Diniz, and Suélia de S. R. F. Rosa. Control design and robustness analysis of a ball and plate system by using polynomial chaos. *AIP Conference Proceedings*, 1637:226–234, 2014.
- [CCKB17] Diego Colón, Americo Cunha, Stefan Kaczmarczyk, and José M. Balthazar. On dynamic analysis and control of an elevator system using polynomial chaos and karhunen-loève approaches. *Procedia Engineering*, 199:1629 – 1634, 2017. X International Conference on Structural Dynamics, EURO-DYN 2017.
- [CFB⁺14] Diego Colón, Murillo A. S. Ferreira, José M. Balthazar, Átila M. Bueno, and Suélia de S. R. F. Rosa. Robustness analysis of an air heating plant and control law by using polynomial chaos. *AIP Conference Proceedings*, 1637:235–244, 2014.
- [DLCBS18] P.B. De Lauro Castrucci, A. Bittar, and R.M. Sales. *Controle Automático*. LTC, 2018.
- [DP13] G.E. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
- [Fer02] Pedro J. Fernandez. *Medida e Integração*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [GPK14] D.W. Gu, P.H. Petkov, and M.M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB®*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London, 2014.
- [Lju99] Lennart Ljung. *System Identification - Theory For the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., second edition, 1999.
- [Nis15] N.S. Nise. *Control Systems Engineering, 7th Edition*. Wiley, 2015.
- [Oga11] K. Ogata. *Engenharia de controle moderno*. PRENTICE HALL BRASIL, 2011.
- [SMP06] A. Smith, A. Monti, and F. Ponci. Robust controller using polynomial chaos theory. In *Industry Applications Conference, 2006. 41st IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2006 IEEE*, volume 5, pages 2511–2517, Oct 2006.
- [SP05] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Wiley, 2005.

- [SPS98] R.S. Sánchez-Peña and M. Sznaier. *Robust systems theory and applications*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. John Wiley, 1998.
- [ZD98] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall Modular Series for Eng. Prentice Hall, 1998.

Prof. Diego Colón
LAC-PTC-EPUSP