Lista 2 suplementar

Nícolas André da Costa Morazotti

28 de setembro de 2020

Questão 1

No capacitor da figura 1, as placas (planas e paralelas) têm área A. A placa da esquerda tem inicialmente carga positiva Q_0, e a da direita $-Q_0$. O meio entre as placas tem condutividade uniforme σ e constante dielétrica κ. Encontre a carga $Q(t)$ em função do tempo.

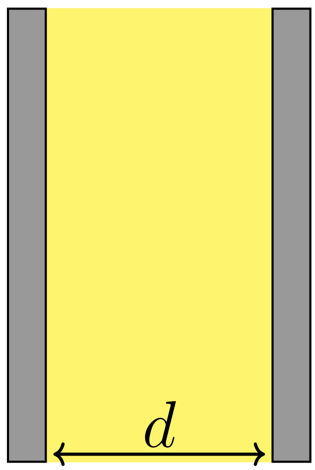

Figura 1: Questões 1 e 2.

Para encontrar a carga que se encontra na placa da esquerda $Q(t)$, precisamos da variação de carga (corrente), que pode ser calculada a partir da expressão

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}. \tag{1}$$

Claramente, a corrente $\mathbf{J} = \hat{z}I/A$, onde z aponta da direita para a esquerda, e $\mathbf{E} = \hat{z}Q/A\kappa\varepsilon_0$. Lembrando ainda que a variação de carga da placa da esquerda deve ser $-I$, temos que

$$-I = \frac{\sigma Q}{\kappa\varepsilon_0} \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sigma Q}{\kappa\varepsilon_0} \tag{3}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\sigma t/\kappa\varepsilon_0}. \tag{4}$$

Questão 2

Calcule a corrente de carga I e a corrente de deslocamento no capacitor da questão 1. Compare as duas e discuta o resultado da comparação.

A corrente de carga I é obtida tomando a derivada temporal de $-Q(t)$:

$$I(t) = \frac{\sigma Q_0}{\kappa\varepsilon_0} e^{-\sigma t/\kappa\varepsilon_0}. \tag{5}$$

A corrente de deslocamento, por sua vez, é o termo extra da equação de Ampère-Maxwell: $\mathbf{j}_D = \kappa\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$. Então,

$$\begin{align}
\mathbf{j}_D &= \kappa\varepsilon_0 \frac{\hat{z}}{A\kappa\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{6}\\
&= -\hat{z} \frac{Q_0}{A\kappa\varepsilon_0} e^{-t/\kappa\varepsilon_0}. \tag{7}
\end{align}$$

Ambas as correntes se anulam. Isso ocorre por que o capacitor isolado no espaço não apresenta campo magnético, mas existe o movimento de cargas internamente a ele.

Questão 3

Vamos chamar de $\mathbf{J}$ a densidade de corrente que resulta da soma da corrente de carga $\mathbf{j}$ com a densidade de corrente de deslocamento $\mathbf{j}_D = \varepsilon_0 \partial \mathbf{D}/\partial t$, isto é, $\mathbf{J} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_D$. Calcule o divergente de $\mathbf{J}$.

O divergente de $\mathbf{J}$ é escrito como

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{8}$$

Podemos inverter a ordem das derivadas de $\mathbf{D}$, tendo

$$\begin{align}
\nabla \cdot \mathbf{J} &= \nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} \tag{9}\\
&= \nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial (\rho/\varepsilon_0)}{\partial t} \tag{10}\\
&= \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{11}
\end{align}$$

Perceba que a equação resultante é exatamente a equação de conservação de cargas, e que $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t$. Assim, $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

Poderíamos também ter identificado a corrente $\mathbf{J}$ usando a equação de Ampère-Maxwell; veja que ela é exatamente $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$. Como o divergente do rotacional é sempre nulo, segue que $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

Questão 4

No circuito da figura 2, desenhe as linhas de campo de

1. A corrente de carga $\mathbf{j}$;
2. A corrente total $\mathbf{J}$.

A corrente de cargas faz o movimento como mostrado na figura 3, parando na placa do capacitor. Já a corrente total não para na placa do capacitor, sendo representada na figura 4.

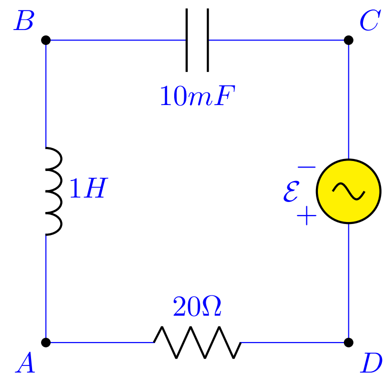

Figura 2: Questão 4.

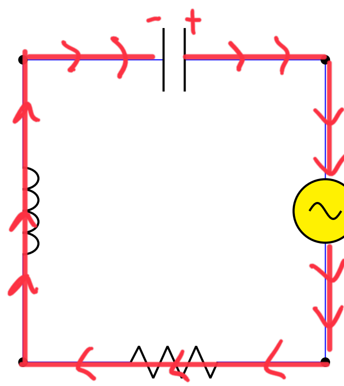

Figura 3: Linhas de corrente de cargas.

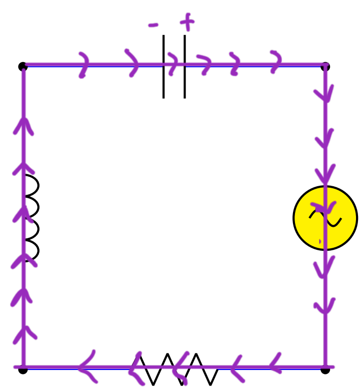

Figura 4: Linhas de corrente de cargas e de deslocamento.

Questão 5

Em aula, encontramos a equação de onda para o campo **B**. Siga procedimento análogo para, a partir da equação de Maxwell que expressa a lei de Faraday, encontrar a equação de onda para o campo elétrico.

Partindo da lei de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{12}$$

podemos calcular o rotacional dela, e usar que as derivadas são comutativas, tendo

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}. \tag{13}$$

Do lado esquerdo da equação, usamos $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$. Do lado direito, substituimos a lei de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{14}$$

obtendo

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \tag{15}$$

Identificando $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ e a equação de Poisson $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, temos

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{16}$$

Finalmente, colocamos a condição de espaço livre, $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, e chegamos na equação de onda

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{17}$$

Questão 6

Suponha que o campo elétrico numa região vazia do espaço é dado pela expressão

$$\mathbf{E} = A \cos(x - vt) \hat{z}, \tag{18}$$

onde A e v são constantes conhecidas. Encontre o campo magnético na mesma região do espaço. *Sugestão: Mostraremos mais adiante que, assim como* $\mathbf{E}$*, o campo* $\mathbf{B}$ *é uma função da variável* $u = x - vt$*. Para facilitar, use essa informação. Empregue a equação de Maxwell associada à lei de Faraday para encontrar o campo magnético.*

A lei de Faraday contém dois termos: em um, temos o rotacional de $\mathbf{E}$; no outro, a derivada parcial temporal de $\mathbf{B}$. Tomando o rotacional da equação dada,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= \hat{x} \left(\frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \right) && (19) \\
&= \hat{x} \frac{\partial}{\partial y} E_z - \hat{y} \frac{\partial}{\partial x} E_z && (20) \\
&= -\hat{y} \frac{\partial}{\partial x} E_z && (21) \\
&= -\hat{y} \frac{\partial}{\partial x} A \cos(x - vt) && (22) \\
&= \hat{y} A \sin(x - vt). && (23)
\end{aligned}$$

Integrando temporalmente a equação, temos

$$\begin{aligned}
\hat{y} A \int dt \sin(x - vt) &= \frac{1}{v} \hat{y} A \cos(x - vt) && (24) \\
\mathbf{B} &= -\int dt \nabla \times \mathbf{E} && (25) \\
&= -\hat{y} \frac{A}{v} \cos(x - vt). && (26)
\end{aligned}$$

Questão 7

Mostre que o campo elétrico dado na questão 6 obedece à lei de Poisson e mostre que o campo magnético obedece à equação $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Ambos os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ não contêm dependências da coordenada na respectiva direção; i.e., não há termos da forma $f(x)\hat{x}$. Assim, o divergente de ambos os campos se anula:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = A\frac{\partial \cos(x - vt)}{\partial z} = 0 \tag{27}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{A}{v}\frac{\partial \cos(x - vt)}{\partial y} = 0, \tag{28}$$

respeitando ambas as leis em questão (já que a solução é para uma região vazia do espaço $\to \rho = 0$).

Questão 8

Parta agora do campo magnético encontrado na questão 6 (mas esqueça, inicialmente, que você conhece o campo elétrico) e da lei de Ampère modificada por Maxwell para encontrar o campo elétrico. Compare com o campo elétrico no enunciado da mesma questão.

Como dito no enunciado, partiremos de

$$\mathbf{B} = -\hat{y}\frac{A}{v}\cos(x - vt) \tag{29}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{30}$$

Já que estamos numa região vazia do espaço, $\mathbf{J} \equiv 0$. Tomando o rotacional de $\mathbf{B}$,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial y}B_z - \frac{\partial}{\partial z}B_y\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial}{\partial z}B_x - \frac{\partial}{\partial x}B_z\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}B_y - \frac{\partial}{\partial y}B_x\right) \tag{31}$$

$$= -\hat{x}\frac{\partial}{\partial z}B_y + \hat{z}\frac{\partial}{\partial x}B_y \tag{32}$$

$$= \hat{z}\frac{\partial}{\partial x}B_y \tag{33}$$

$$= -\hat{z}\frac{A}{v}\sin(x - vt). \tag{34}$$

Se integrarmos tal expressão no tempo, temos

$$-\hat{z}\frac{A}{v}\int dt \sin(x - vt) = \hat{z}\frac{A}{v^2}\cos(x - vt). \tag{35}$$

A lei de Ampère-Maxwell nos leva então a

$$\hat{z}\frac{A}{v^2}\cos(x - vt) = \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{36}$$

$$\mathbf{E} = \hat{z}A\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 v^2}\cos(x - vt). \tag{37}$$

Basta agora usar que $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2 = 1/v^2$ e temos

$$\mathbf{E} = \hat{z}A\cos(x - vt). \tag{38}$$

Questão 9

Deduzimos a equação de onda para o campo magnético no espaço livre. Suponha agora que estamos num meio isolante com constante dielétrica κ. A corrente de cargas e a densidade de cargas ainda são iguais a zero, mas o campo $\mathbf{D}$ não é mais igual a $\mathbf{E}$. Nessas condições, deduza a equação de onda para $\mathbf{B}$.

Quando estamos num meio isolante, a lei de Poisson é

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{39}$$

Já a lei de Ampère-Maxwell se torna

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{40}$$

Colocando a condição de espaço livre, $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Usando ainda que $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ e $\mathbf{D} = \kappa \mathbf{E}$, a lei de Ampère-Maxwell se torna

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{41}$$

A lei de Faraday fica inalterada em meios isolantes. Tomando o rotacional da equação 41, temos

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} \tag{42}$$

$$-\nabla^2 \mathbf{B} = \kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \tag{43}$$

$$= -\frac{\kappa}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{44}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\kappa}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{45}$$

A equação de onda, em meios isolantes, têm assim uma modificação feita na velocidade de propagação. Veja que podemos reescrever $v = c/\sqrt{\kappa} < c$, pois $\kappa > 1$. Portanto, em meios isolantes a onda eletromagnética se propaga mais lentamente que no vácuo (refração).

Questão 10

Refaça a questão 5 nas condições da questão 9. Compare o resultado com o da questão 9.

Desta vez, começamos tomando o rotacional da equação de Faraday.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}. \tag{46}$$

Substituindo a lei de Faraday (como escrita na equação 41) do lado direito da equação,

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \tag{47}$$

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{48}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\kappa}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{49}$$