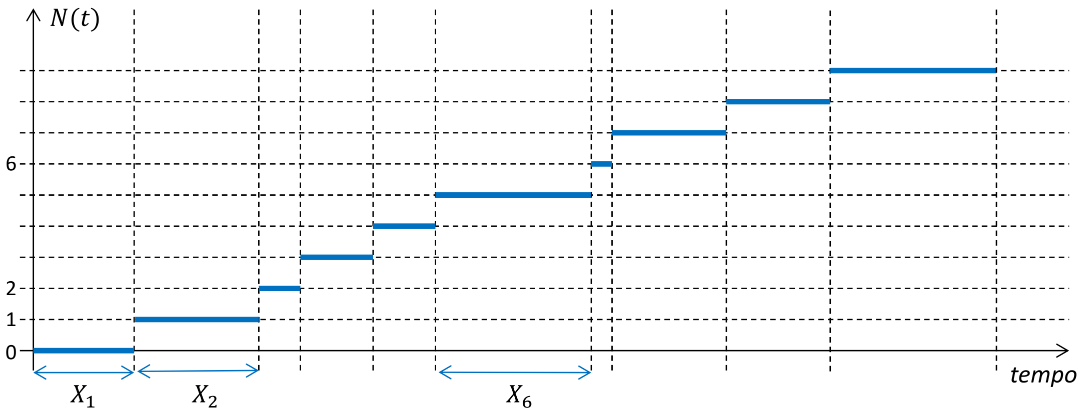
# Aula 4. Processo de Poisson.

# Definição. (Teórica).

Anatoli Iambartsev
IME-USP

## Processo de Contagem.



## Processo aleatório (estocástico).

variável aleatória $X: \ \Omega \to \mathbb{R} \quad X(\omega) \in \mathbb{R}$

processo aleatório $X: \ \Omega \to \mathbb{D} \quad [X(\omega)](\cdot) \in$ conjunto de funções $\mathbb{D}$

variável aleatória $[X(\omega)](t) \in \mathbb{R}$

## Processo de Poisson. Definição 1.

**Definição 1.** Um processo de contagem $N(t)$ é um processo de Poisson com taxa (intensidade) $\lambda, \lambda > 0$, se

1. $N(0) = 0$;

2. $N(t+s) - N(s)$ não depende do $N(s)$ para quaisquer $t, s \leq 0$, i.e., o processo tem incrementos independentes;

3. $P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n = 0, 1, \ldots,$ i.e., o número de eventos que ocorreram durante o tempo $t$ tem a distribuição de Poisson com média $\lambda t$.

$$N(t+s) - N(s) \sim Poi(\lambda t).$$

Notamos que o item 3 da Definição 1 significa que os incrementos do processo de Poisson são estacionários: para quaisquer $s_1, s_2, t$ e $n$ $P\{N(s_1+t) - N(s_1) = n\} = P\{N(s_2+t) - N(s_2) = n\}$. Em particular, se tomarmos $s_3 = 0$, teremos $P\{N(s_3+t) - N(s_3) = n\} = P\{N(t) - N(0) = n\} = P\{N(t) = n\}$

## Processo de Poisson. Definição 1.
## Exemplo 1.

Seja $N(t)$ um processo de Poisson com intensidade $\lambda$. Qual é a média do número de eventos que ocorreram até o tempo $t$?

**Solução.** Pelo item primeiro da definição, temos

$$N(t) = N(t) - N(0).$$

Pelo terceiro item, temos que a distribuição de diferença $N(t) - N(0)$ é de Poisson com média $\lambda t$,

$$N(t) - N(0) \sim Poi(\lambda t).$$

$\square$

## Processo de Poisson. Definição 2. Infinitesimal.

**Definição.** Um processo $\{N(t), t \geq 0\}$ È um processo de Poisson com intensidade $\lambda, \lambda > 0$, se

1. $N(0) = 0$;

2. os incrementos são independentes e estacionários;

3. $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$;

4. $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$.

## Processo de Poisson. Equivalência das definições.

$$\text{Definição 2} \implies \text{Definição 1}$$

Seja $P_n(t) = \mathbb{P}(N(t) = n)$. Obtemos a equação diferencial para $P_0(t)$ da seguinte maneira:

$$P_0(t+h) = \mathbb{P}(N(t+h) = 0) = \mathbb{P}\Big(N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\Big)$$
$$= \mathbb{P}(N(t) = 0)\mathbb{P}\Big(N(t+h) - N(t) = 0\Big) = P_0(t)\left(1 - \lambda h + o(h)\right).$$

Logo, obtemos que

$$P_0'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(-\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}\right) = -\lambda P_0(t).$$

A solução desta equação é $P_0(t) = Ce^{-\lambda t}$. Usando a condição inicial $P_0(0) = 1$, obtemos a constante $C = 1$ e

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

## Processo de Poisson. Equivalência das definições.

Definição 2 $\Longrightarrow$ Definição 1

De forma similar, para $n > 0$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
P_n(t+h) = P_n(t)\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 0)& \\
+ P_{n-1}(t)\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1)& \\
+ \sum_{k=2}^{n} P_{n-k}(t)\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = k)& \\
= P_n(t)(1 - \lambda h + o(h)) + P_{n-1}(t)(\lambda h + o(h)) + \sum_{k=2}^{n} P_{n-k}(t)o(h)&
\end{aligned}
$$

## Processo de Poisson. Equivalência das definições.

Definição 2 $\Longrightarrow$ Definição 1

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda h+o(h))+P_{n-1}(t)(\lambda h+o(h))+\sum_{k=2}^{n} P_{n-k}(t)o(h).$$

Logo

$$\begin{aligned} P_n'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t) \\ &\quad + \lim_{h\to 0}\left(P_n(t)\frac{o(h)}{h}+P_{n-1}(t)\frac{o(h)}{h}+\sum_{k=2}^{n}P_{n-k}(t)\frac{o(h)}{h}\right) \\ &= -\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t). \end{aligned}$$

## Processo de Poisson. Equivalência das definições.

Definição 2 $\Longrightarrow$ Definição 1

A equação obtida

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

pode ser reescrita da seguinte forma:

$$e^{\lambda t}[P_n'(t) + \lambda P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_n(t)) = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t).$$

Usando indução matemática, vamos mostrar que a solução do sistema de equações tem a solução $P_n(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!$. Usando equação anterior e suposição da indução, temos

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_n(t)) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{ou} \quad e^{\lambda t} P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} + C.$$

Pela condição inicial $P_0(0) = 0$, temos que $C = 0$. $\square$

## Processo de Poisson. Equivalência das definições.

Definição 2 $\Longleftarrow$ Definição 1

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(h) = 1) &= \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1) = e^{-\lambda h}\lambda h \\
&= \left(1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} + o(h^2)\right)\lambda h = \lambda h + o(h) \\
\mathbb{P}(N(h) \geq 2) &= \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = k) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{k!} e^{-\lambda h} \\
&\cong \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{k!} = o(h)
\end{aligned}$$

**References:**

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models.* 6th edition, Academic Press, 1997.