MAE0326-Aplicações de Processos Estocásticos

Cadeias de Markov em tempo contínuo.

Como já recordamos, $\{X_t\}_{t \geq 0}$ em S

Markov Property

A continuous-time stochastic process $(X_t)_{t\geq 0}$ with discrete state space S is a *continuous-time Markov chain* if

$$P(X_{t+s} = j | X_s = i, X_u = x_u, 0 \leq u < s) = P(X_{t+s} = j | X_s = i),$$

for all $s, t, \geq 0$, $i, j, x_u \in S$, and $0 \leq u < s$.

Homogênea no tempo (não depende do horário "do relógio")

The process is said to be *time-homogeneous* if this probability does not depend on s. That is,

$$P(X_{t+s} = j | X_s = i) = P(X_t = j | X_0 = i), \text{ for } s \geq 0. \tag{7.2}$$

Semigrupo de probabilidade $\{\mathbb{P}_t\}_{t \geq 0}$

$P_{ij}(t) = P(X_t = j | X_0 = i).$

Propriedade de semigrupo:

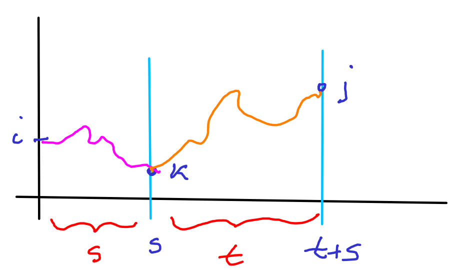
Chapman–Kolmogorov Equations

For a continuous-time Markov chain $(X_t)_{t\geq 0}$ with transition function $\boldsymbol{P}(t)$,

$$\boldsymbol{P}(s+t) = \boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t),$$

for $s, t \geq 0$. That is,

$$P_{ij}(s+t) = [P(s)P(t)]_{ij} = \sum_k P_{ik}(s)P_{kj}(t), \text{ for states } i, j, \text{ and } s, t \geq 0.$$



Exemplo: Processo de Poisson.

Let $X_1, X_2, \ldots$ be a sequence of i.i.d. exponential random variables with parameter λ. For $t > 0$, let

$$N_t = \max\{n : X_1 + \cdots + X_n \le t\},$$

with $N_0 = 0$. Then, $(N_t)_{t \ge 0}$ defines a Poisson process with parameter λ.

Let

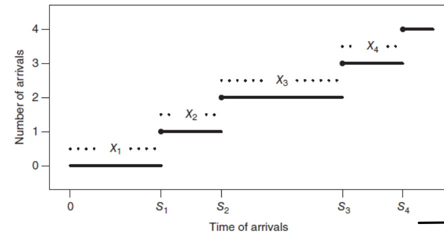
$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots$$

We call $S_1, S_2, \ldots$ the *arrival times* of the process, where S_k is the time of the kth arrival. Furthermore,

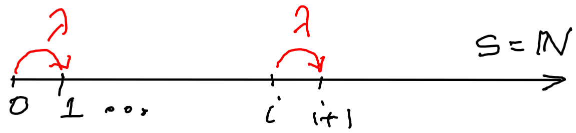
$$X_k = S_k - S_{k-1}, \quad \text{for } k = 1, 2, \ldots$$

is the *interarrival time* between the $(k-1)$th and kth arrival, with $S_0 = 0$.

S



tempo



$S = \mathbb{N}$

Matriz de taxas

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \\ i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \cdots & & i & i+1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} -\lambda & \lambda & 0 & & & & & \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & & & & \\ & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 0 & -\lambda & \lambda & 0 \ldots \end{array}\right] \end{array}$$

Example 7.1 (Poisson process) A Poisson process $(N_t)_{t \ge 0}$ with parameter λ is a continuous-time Markov chain. The Markov property holds as a consequence of stationary and independent increments. For $0 \le i \le j$,

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) = P(N_{t+s} = j | N_s = i) &= \frac{P(N_{t+s} = j, N_s = i)}{P(N_s = i)} \\ &= \frac{P(N_{t+s} - N_s = j - i, N_s = i)}{P(N_s = i)} \\ &= P(N_{t+s} - N_s = j - i) \\ &= P(N_t = j - i) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}. \end{aligned}$$

The transition function is

$$\boldsymbol{P}(t) = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} e^{-\lambda t} & (\lambda t)e^{-\lambda t} & (\lambda t)^2 e^{-\lambda t}/2 & (\lambda t)^3 e^{-\lambda t}/6 & \cdots \\ 0 & e^{-\lambda t} & (\lambda t)e^{-\lambda t} & (\lambda t)^2 e^{-\lambda t}/2 & \cdots \\ 0 & 0 & e^{-\lambda t} & (\lambda t)e^{-\lambda t} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda t} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right) \end{array}.$$

(verifique!)

■

Arrival Times and Gamma Distribution

For $n = 1, 2, \ldots$, let S_n be the time of the nth arrival in a Poisson process with parameter λ. Then, S_n has a gamma distribution with parameters n and λ. The density function of S_n is

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}, \quad \text{for } t > 0.$$

Mean and variance are

$$E(S_n) = \frac{n}{\lambda} \quad \text{and} \quad Var(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

(verifique!)

Uma cadeia de Markov em tempo contínuo é "uma cadeia de Markov em tempo discreto cujos saltos acontecem após tempos de permanência exponenciais".

A cadeia de Markov em tempo discreto que governa os saltos é chamada de

"Cadeia de Markov Imersa"

Holding Times and Embedded Chains

By homogeneity, when a Markov chain visits state i its forward evolution from that time onward behaves the same as the process started in i at time $t = 0$. Time-homogeneity and the Markov property characterizes the distribution of the length of time that a continuous-time chain stays in state i before transitioning to a new state.

Holding Times are Exponentially Distributed

Let T_i be the *holding time* at state i, that is, the length of time that a continuous-time Markov chain started in i stays in i before transitioning to a new state. Then, T_i has an exponential distribution.

Exemplo: Matriz de transição da cadeia imersa do Processo de Poisson

Example 7.2 (Poisson process) For a Poisson process with parameter λ, the holding time parameters are constant. That is, $q_i = \lambda$, for $i = 0, 1, 2, \ldots$ The process moves from 0 to 1 to 2, and so on. The transition matrix of the embedded chain is

$$\mathbb{P} = \quad \widetilde{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}.$$

Obs: nas minhas notas anteriores usei P para denotar essa matriz de transição. Note que $\mathbb{P}_t$ ou $\mathbb{P}(t)$

- *indica as probabilidades de transição do processo em tempo contínuo.*

$T_i \sim \exp(\lambda)$, $q_i = \lambda, \forall i$

Sucessivos tempos de permanência ("holding times")

Exemplo: Cadeia de dois estados com matriz de taxas

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

Matriz de transição da cadeia imersa

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\left.\begin{array}{l} T_0^k \sim \exp(\lambda) \\ T_1^k \sim \exp(\mu) \end{array}\right\}$ k-ésima visita (independentes)

■ **Example 7.4** The general three-state continuous-time Markov chain is described by the transition graph in Figure 7.3. In terms of the transition rates, holding time parameters are

$S = \{1, 2, 3\}$

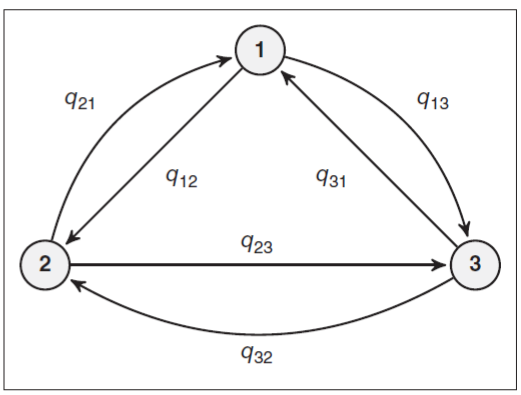
$$(q_1, q_2, q_3) = (q_{12} + q_{13}, q_{21} + q_{23}, q_{31} + q_{32}),$$

$T_i^k \sim \exp(q_i)$

with embedded chain transition matrix

$$\mathbb{P} = \quad \widetilde{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & q_{12}/q_1 & q_{13}/q_1 \\ q_{21}/q_2 & 0 & q_{23}/q_2 \\ q_{31}/q_3 & q_{32}/q_3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

■



$$Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

$q_{ii} = -q_i \quad i \in S$

Dinâmica

Kolmogorov Forward, Backward Equations

A continuous-time Markov chain with transition function $\boldsymbol{P}(t)$ and infinitesimal generator $\boldsymbol{Q}$ satisfies the *forward equation*

$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} \tag{7.3}$$

and the *backward equation*

$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t). \tag{7.4}$$

Equivalently, for all states i and j,

$$P'_{ij}(t) = \sum_k P_{ik}(t) q_{kj} = -P_{ij}(t) q_j + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj}$$

Exemplo: Processo de Poisson.

Example 7.8 (Poisson process) The transition probabilities for the Poisson process with parameter λ,

$$P_{ij}(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, \text{ for } j \geq i,$$

were derived in Example 7.1. They satisfy the Kolmogorov forward equations

$$P'_{ii}(t) = -\lambda P_{ii}(t),$$
$$P'_{ij}(t) = -\lambda P_{ij}(t) + \lambda P_{i,j-1}, \text{ for } j = i+1, i+2, \ldots,$$

and the backward equations

$$P'_{ii}(t) = -\lambda P_{ii}(t),$$
$$P'_{ij}(t) = -\lambda P_{ij}(t) + \lambda P_{j+1,i}, \text{ for } j = i+1, i+2, \ldots$$

Exercício: Resolva recursivamente:

1) $P_{00}(t) = e^{-\lambda t}$

2) $P'_{01}(t) = \lambda P_{00}(t) - \lambda P_{01}(t)$

etc...

■

Cadeia de dois estados.

Example 7.9 (Two-state process) For a continuous-time process with generator

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \end{array}$$

$S = \{1,2\}$

(nas notas anteriores era S={0,1})

Equação adiantada

$$\underbrace{\begin{aligned} P'_{11}(t) &= -P_{11}(t)q_1 + P_{12}(t)q_{21} \\ &= -\lambda P_{11}(t) + (1 - P_{11}(t))\mu \\ &= \mu - (\lambda + \mu)P_{11}(t), \end{aligned}}_{}$$

$+ \quad P'_{12}(t) = \ldots$

(verifique!)

$$P_{11}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

e, como já vimos:

The transition function is

$$P(t) = \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda - \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \mu - \mu e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix} \end{array}. \qquad (7.5)$$

■

Comportamento após muito tempo.

Limiting Distribution

A probability distribution $\boldsymbol{\pi}$ is the *limiting distribution* of a continuous-time Markov chain if for all states i and j,

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}_{ij}(t) = \pi_j.$$

e distribuição estacionária:

Stationary Distribution

A probability distribution $\boldsymbol{\pi}$ is a *stationary distribution* if

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}(t), \text{ for } t \geq 0.$$

That is, for all states j,

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}(t), \text{ for } t \geq 0.$$

Definição: Uma cadeia de Markov em tempo contínuo $\{X_t\}_{t\geq 0}$
é dita irredutível se, para todo par de estados i e j

$P_{ij}(t) > 0$ ***para algum*** $t \geq 0$.

obs: Ou seja, a cadeia é irredutivel se "todos os estados se comunicam", no sentido de que a partir de qualquer estado i posso, eventualmente, visitar qualquer outro estado j. Como o termo "irredutível" sugere, não podemos reduzir, separar, a cadeia em pedaços menores e estudar o comportamento "em cada pedaço". A cadeia vai "passear por todo o espaço de estados S".

obs: Além de não haver a questão de "periodicidade", que temos para cadeias em tempo discreto, outra simplicidade do caso contínuo é que, se

$P_{ij}(t) > 0$ para algum $t \geq 0 \Rightarrow P_{ij}(t) > 0$ para todo $t > 0$.

Um estado i com $q_i = 0$ ***é dito "estado absorvente", uma vez que o tempo até sair será infinito. Nesse caso a cadeia claramente não é irredutível. Vamos supor que nenhum estado seja absorvente, ou seja, que*** $q_i > 0, \ \forall i \in S$

Um resultado importante é que o comportamento para tempos longos de uma cadeia de Markov em tempo contínuo irredutível com S finito é bastante simples. Temos convergência para uma distribuição de probabilidade estacionária, que é única.

Fundamental Limit Theorem

Theorem 7.2. *Let $(X_t)_{t\geq 0}$ be a finite, irreducible, continuous-time Markov chain with transition function $\boldsymbol{P}(t)$. Then, there exists a unique stationary distribution $\boldsymbol{\pi}$, which is the limiting distribution. That is, for all j,*

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \pi_j, \textit{for all initial } i.$$

Equivalently,

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{\Pi},$$

where $\boldsymbol{\Pi}$ is a matrix all of whose rows are equal to $\boldsymbol{\pi}$.

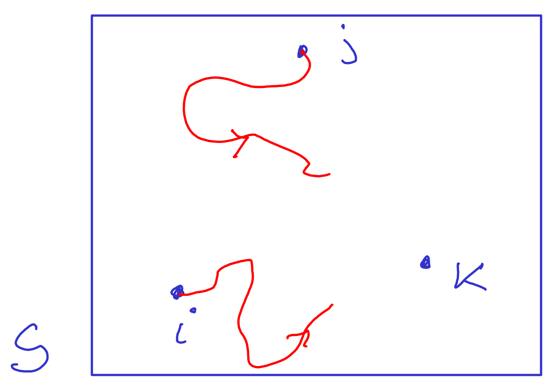
Do ponto de vista intuitivo este resultado é bastante simples de entender. A demonstração também não é complicada e vamos apresentar a idéa principal.

Dizer que $\lim_{t\uparrow\infty} P(t)$

existe, implica que $\lim_{t\uparrow\infty} P_{ik}(t) = \lim_{t\uparrow\infty} P_{jk}(t)$

para qualquer par de estados i e j.

A igualdade implica que após muito tempo, o processo "esquece" onde começou.



Para entender por que isto acontece, considere duas "simulações", ou realizações dessa cadeia de Markov, uma X_t^i *começando no estado i e outra* X_t^j *começando no estado j,* *isto é, estas duas cadeia têm as mesmas taxas de transição e*

$$P(X_t^i = i) = P(X_t^j = j) = 1$$

Podemos perguntar qual é a diferença entre as probabilidades de cada uma delas estar no estado k num dado instante t.

$$P(X_t^i = k) - P(X_t^j = k)$$

Porquê esta diferença vai a zero para tempos longos?

Antes e mostrar isso precisamos entender melhor o que é "uma realização de uma cadeia de Markov" com uma dada Matriz de transição Q. Do ponto de vista "pragmático" significa ter um programa de computador, um algoritmo, capaz de simular a sequência de estados dessa cadeia.

Este algoritmo precisa fornecer:

1) A colecão de sucessivos tempos de permanência

T_i^k para $i \in S$ e $k = 1, 2, \ldots$

2) A sequência de saltos da cadeia imersa, governada pela matriz de transição P.

Podemos discutir melhor depois os detalhes deste algoritmo (veja o livro de simulação de S. Ross). Mas a idéia básica é simples.

Suponha que oseu computador consegue gerar uma sequência i.i.d. de v.a. uniformes no intervalo [0 , 1]: $U_1, U_2, \ldots \quad U_i \sim U([0,1])$, indep.

(Como você deve saber, um computador clássico não pode gerar uma sequência dessas, mas consegue gerar sequências que, para "todos os efeitos práticos", se comporta como tal. Um computador quântico pode gerar essas sequências mas provavelmente você ainda não tem acesso a um deles.)

Perguntas: Como, a partir da seq. i.i.d. de uniformes, posso gerar

1) Uma coleçao i.i.d de v.a com distribuição exponencial com dado parâmetro?

2) Uma coleção de estados de S que "foi gerado por uma matriz de transição P", com certo estado inicial arbitrário de S? Ou seja, como usar a sequência de uniforme que o computador fornece para simular a cadeia de Markov imersa?

Uma idéia simples para mostrar que

$$\lim_{t \uparrow \infty} \left| P(X_t^i = k) - P(X_t^j = k) \right| = 0$$

é conhecida como "acoplamento". Acoplar dois processos estocásticos significa "construir os dois processos ao mesmo tempo", ou seja "simular os dois conjuntamente" a partir das mesmas sequências i.i.d. fornecidas pelo computador.

O objetivo de acoplar dois processos é garantir alguma relação de interesse entre os processos.

Vamos acoplar $\{X_t^i\}$ e $\{X_t^j\}$ ***usando o chamado acoplamento básico:***

"Se as duas cadeias de Markov estão em estados diferentes, as duas evoluem independentemente até que, eventualmente, se encontrem; a partir deste instante essas duas cadeias passam a evoluir juntas"

Com este acoplamento temos que

$$P(X_t^i = X_t^j = k) = 1 \quad \text{para todo } t \geq 0 \quad \underline{\underline{\text{se}}} \quad i = j$$

pois as duas cadeias começam e continuam juntas para sempre.

Agora suponha que $i \neq j$ ***e denote por T o instante no qual as duas cadeias se encontram.***

Então

$$P(X_t^i \neq X_t^j) = P(X_t^i \neq X_t^j, \overset{\text{"já se encontraram"}}{T \leq t}) + P(X_t^i \neq X_t^j, \overset{\text{"ainda não se encontraram"}}{T > t})$$

Mas $P(X_t^i \neq X_t^j, T \leq t) = 0$

pois as duas cadeias já se encontraram e, pelo acoplamento, estão juntas em t.

Por outro lado,

Porquê?

$$P(X_t^i \neq X_t^j, T > t) \leq P(T > t)$$

Exercício: nas condições do teorema acima, mostre que

$$\lim_{t \uparrow \infty} P(T > t) = 0$$

e segue o resultado. (Complete o argumento)

Example 7.13 (Two-state process) For the continuous-time Markov chain on two states,

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda+\mu}\begin{pmatrix} \mu+\lambda e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda-\lambda e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \mu-\mu e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda+\mu e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda+\mu}\begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}.$$

The stationary distribution is

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right).$$

■

Equação de balanceamento no caso contínuo. (Já vimos nas notas anteriores)

Stationary Distribution and Generator Matrix

A probability distribution $\boldsymbol{\pi}$ is a stationary distribution of a continuous-time Markov chain with generator $\boldsymbol{Q}$ if and only if

$$\boldsymbol{\pi Q} = \boldsymbol{0}.$$

That is,

$$\sum_i \pi_i Q_{ij} = 0, \text{ for all } j.$$

Na notação que usamos nas notas anteriores tinhamos

$$Q_{ij} = q_{ij} = \begin{cases} -q_i & \text{se } i=j \\ q_i P_{ij} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

onde P é a matriz de transição da cadeia imersa e q_i *é o parâmetro da v.a. da exponencial associada ao tempo de permanência no estado i.*

Reversibilidade: *Uma distribuição de probabilidade em S é dita reversível se "A probabilidade de examinar o processo num tempo curto,* Δt *encontrá-lo num estado i e, em seguida, observar um salto para um outro estado j é igual a probabilidade de encontrá-lo em j e observar um salto para i".*

Em outras palavras: suponha que alguem "filma" a evoluçao do processo; se assistimos o filme não conseguimos saber se o filme está sendo mostrado na ordem correta ou "de trás para frente".

Matriz de taxas

Time Reversibility

A continuous-time Markov chain with $\underbrace{\text{generator}}$ $\boldsymbol{Q}$ and unique stationary distribution $\boldsymbol{\pi}$ is said to be *time reversible* if

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}, \text{ for all } i, j. \tag{7.9}$$

Obs: Note que

"A probabilidade de examinar o processo num tempo curto Δt *, encontrá-lo num estado i e, em seguida, observar um salto para um outro estado j" é (aproximadamente)*

$$\pi(i) P_{ij}(\Delta t) \cong \pi(i) q_{ij} \Delta t$$

(Vimos nas notas de aula anterior)

Exercício: Mostre que se uma distribuição de probabilidade em S é reversível então ela é invariante mas não vale a afirmação inversa.

Exemplo: Considere S = { 0, 1, 2 } com matriz de taxas

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & p & 1-p \\ 1-p & -1 & p \\ p & 1-p & -1 \end{bmatrix} \qquad 0 \leq p \leq 1$$

Determine a distribuição estacionária. Mostre que só temos reversibilidade para

$p = 1/2$

Uma classe grande de cadeias de Markov cuja medida estacionária é reversível é a classe dos "processos de Nascimento e Morte".

$S = \mathbb{N}$

"taxas de nascimento"

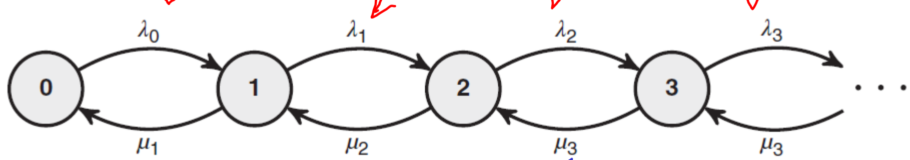


Figure 7.9 Birth-and-death process.

"taxas de morte"

Matriz de taxas

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}.$$

Distribuição estacionária. ***Equação de balanceamento para cada i em S***

$(i=0)$ $\qquad \pi(0)\lambda_0 = \pi(1)\mu_1$

$(i>0)$ $\qquad \pi(i)(\lambda_i+\mu_i) = \pi(i-1)\lambda_{i-1} + \pi(i+1)\mu_{i+1}$

Exercício: Mostre a solução deste sistema de equações é $\pi(0) = a$ e

$$\pi(i) = a\,\frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_i}, \quad i \geq 1, \quad \text{para } a \in \mathbb{R}$$

O valor de a é arbitrário. Temos infinitas distribuições estacionárias? Sempre temos pelo menos uma distribuição estacionária?

É claro que não basta satisfazer a condição de balanceamento para ser uma distribuição de probabilidade estacionária. Sempre está "implícita" a condição de que $\pi : S \to \mathbb{R}$ *é uma distribuição de probabilidade, ou seja*

$$\pi(i) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i \in S} \pi(i) = 1$$

Então, para que

$$\begin{cases} \pi(0) = a \\ \pi(i) = a \dfrac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_i} & i \geq 1 \end{cases}$$

seja uma distribuição de probabilidade precisamos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_i} < \infty$$

(ou seja, as taxas de nascimento crescem mais devagar que as taxas de morte)

e nesse caso

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) = \pi(0) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_i} \right)$$

tem solução.

Neste caso a distribuição estacionária é única. É reversível?

O que significa, intuitivamente, termos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_i} = \infty \quad ?$$

Exercício: Mostre que a distribuição estacionária do processo de nascimento e morte é sempre reversível.

Exemplo: (Fila M/M/1) Considere o processo de nascimento e morte mais simples no qual

$$\lambda_i = \lambda$$

$$\mu_i = \mu$$

Quando existe distribuição estacionária?

Exemplo: (Processo de Yule)

$$\lambda_i = i \cdot \lambda$$

$$\mu_i = 0$$

"Bactérias imortais que se dividem, independentemente, com taxa λ ***"***
Existe distribuição estacionária?

Exercício: use a equação de Kolmogorov e verifique que

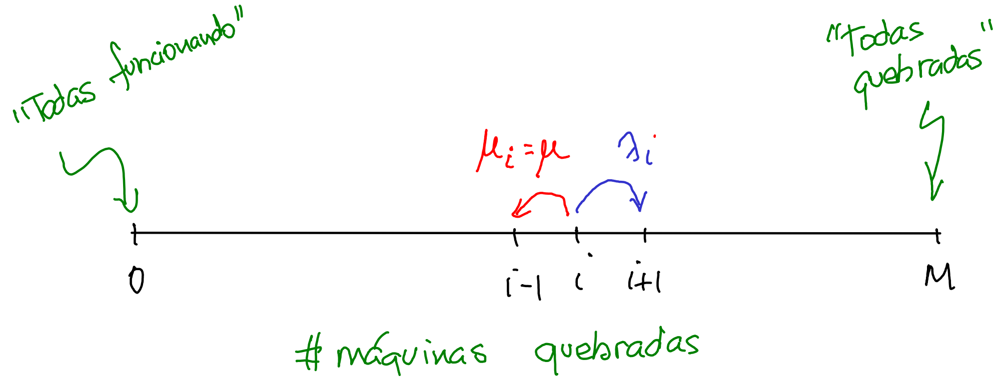
$$P_{ik}(t) = \binom{k-1}{i-1} e^{-\lambda i t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{k-1}$$

Example 6.13 (A Machine Repair Model) Consider a job shop that consists of M machines and one serviceman. Suppose that the amount of time each machine runs before breaking down is exponentially distributed with mean $1/\lambda$, and suppose that the amount of time that it takes for the serviceman to fix a machine is exponentially distributed with mean $1/\mu$. We shall attempt to answer these questions: (a) What is the average number of machines not in use? (b) What proportion of time is each machine in use?

M máquinas
1 funcionário (atendente)

Tempos de quebra $\exp(\lambda)$

Tempos de conserto $\exp(\mu)$



$$\lambda_i = \underbrace{(M-i)}_{\#\text{ de máquinas funcionando}}\lambda$$

Posso definir $\{\lambda_i, \mu_i\}$ *para* $i > M$?

$$\pi(0) = P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{M} [M\lambda(M-1)\lambda \cdots (M-n+1)\lambda/\mu^n]}$$

$$= \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{M} (\lambda/\mu)^n M!/(M-n)!},$$

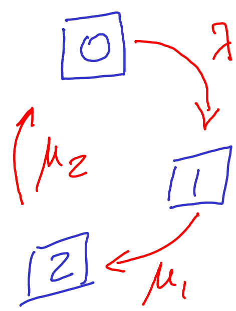
$$\pi(n) = P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n M!/(M-n)!}{1 + \sum_{n=1}^{M} (\lambda/\mu)^n M!/(M-n)!}, \qquad n = 0, 1, \ldots, M$$

Hence, the average number of machines not in use is given by

$$\sum_{n=0}^{M} nP_n = \frac{\sum_{n=0}^{M} n(\lambda/\mu)^n M!/(M-n)!}{1 + \sum_{n=1}^{M} (\lambda/\mu)^n M!/(M-n)!} \tag{6.22}$$

Exemplo dos engraxates (S. Ross)

Example 6.1 (A Shoeshine Shop) Consider a shoeshine establishment consisting of two chairs—chair 1 and chair 2. A customer upon arrival goes initially to chair 1 where his shoes are cleaned and polish is applied. After this is done the customer moves on to chair 2 where the polish is buffed. The service times at the two chairs are assumed to be independent random variables that are exponentially distributed with respective rates μ_1 and μ_2. Suppose that potential customers arrive in accordance with a Poisson process having rate λ, and that a potential customer will enter the system only if both chairs are empty.



The preceding model can be analyzed as a continuous-time Markov chain, but first we must decide upon an appropriate state space. Since a potential customer will enter the system only if there are no other customers present, it follows that there will always either be 0 or 1 customers in the system. However, if there is 1 customer in the system, then we would also need to know which chair he was presently in. Hence, an appropriate state space might consist of the three states 0, 1, and 2 where the states have the following interpretation:

State	*Interpretation*
0	system is empty
1	a customer is in chair 1
2	a customer is in chair 2

Distribuição estacionária?

Exercício: Reformule o problema, trocando para: "Um cliente que chega e encontra a cadeira 1 ocupada, vai embora; ele entra se esta cadeira 1 estiver vazia"; defina a o que acontece se o cliente na cadeira 1 tem seu serviço terminado mas a cadeira 2 ainda está ocupada.

Voltando ao problema original do Ross:

Example 6.15 Let us reconsider the shoeshine shop of Example 6.1, and determine the proportion of time the process is in each of the states 0, 1, 2. Because this is not a birth and death process (since the process can go directly from state 2 to state 0), we start with the balance equations for the limiting probabilities.

State	*Rate that the process leaves = rate that the process enters*
0	$\lambda P_0 = \mu_2 P_2$
1	$\mu_1 P_1 = \lambda P_0$
2	$\mu_2 P_2 = \mu_1 P_1$

$\pi(0) = P_0$
$\pi(1) = P_1$
$\pi(2) = P_2$

Solving in terms of P_0 yields

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} P_0, \qquad P_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} P_0$$

which implies, since $P_0 + P_1 + P_2 = 1$, that

$$P_0 \left[1 + \frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_1} \right] = 1$$

então

$$P_0 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2)}$$

$$P_1 = \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1 \mu_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2)},$$

$$P_2 = \frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 \mu_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2)} \quad \blacksquare$$

Exercício: Esta distribuição estacionária é reversível?

Processos de Fila:

São processos bastante diversos descrevendo "sistemas" nos quais "clientes" chegam e precisam respeitar certos critérios para "serem atendidos".

Naturalmente a definição do processo vai precisar definir diversos detalhes, como é o processo de chegada, critérios de "ordem de atendimento", "número de atendentes prestando o serviço", "distribuição dos tempos de atendimento", "capacidade do sistema" e talvez ainda outros.

Um exemplo simples (já mencionado acima) é a fila   M/M/1

M \ M \ 1

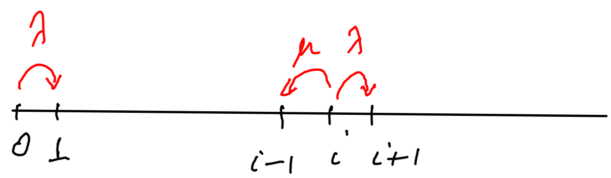
tempos de chegada
Memoryless
(sem memória)
Poisson(λ)

tempos de atendimento
Memoryless
(exponenciais)
exp(μ)

número de atendentes

Processo de nascimento e morte com

$$\lambda_i = \lambda$$
$$\mu_i = \mu$$



Clientes chegam num sistema de "guiche único" conforme um Processo de Poisson com parâmetro λ ***clientes por unidade de tempo; se um cliente chega e encontra o sistema vazio, ele começa a ser atendido imediatamente, com tempo de atendimento que é uma v.a. exponencial com parâmetro*** μ ***; se o sistema estiver ocupado, o cliente aguarda na fila, sendo que seu atendimento acontece por "ordem de chegada"; os sucessivos tempos de atendimento são independentes.***

Exercício: verifique que as taxas concordam com a definição intuitiva.

Distribuição estacionária. A condição neste caso é

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i < \infty$$

que vai ser satisfeita se $\lambda < \mu$, *quando*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu-\lambda}$$

e temos $\pi(0) = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

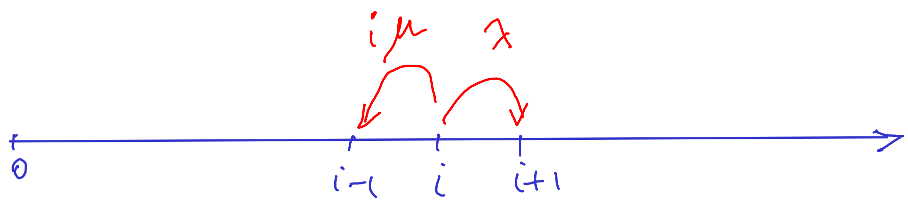
$$\pi(i) = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-1} \qquad i \geq 1$$

O que acontece para $\lambda \geq \mu$?

Fila M/M/∞

Chegada e atendimento como antes. Mas infinitos atendentes!?

Este seria um sistema de filas que modela "auto-atendimento". Por exemplo, pode ser que o serviço do sistema seja pegar um formulário que o próprio "cliente" preenche e entrega. Os clientes chegam conforme Processo de Poisson e cada preenchimento, independentemente, demora um tempo exponencial.



$\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = i\mu$, $i \geq 0$

Exercícios:
Qual condição entre os dois parâmetros λ e μ *deve ser satisfeita para a existência da distribuição estacionária?*

Qual é a distribuição estacionária?

Fila M/M/1 com capacidade máxima.

Considere novamente o exemplo simples da fila M/M/1

M / M / 1

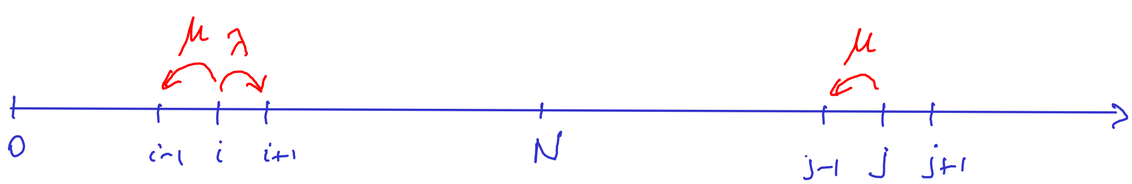
tempos de chegada
Memoryless
(sem memória)
Poisson(λ)

tempos de atendimento
Memoryless
(exponenciais)
exp(μ)

número de atendentes

Mas agora suponha que o sistema tenha uma capacidade máxima de N clientes.

"Um cliente que chega e encontra o sistema lotado (N ou mais clientes já no sistema) vai embora"



Qual é a condição nos parâmetros para a existência da distribuição estacionária?

Qual é a distribuição estacionária (quando existe)?