Vetor gradiente e Regra da Cadeia

O vetor gradiente

Definição

Seja $z = f(x, y)$ *uma função que admite derivadas parciais em* (x_0, y_0)*. O vetor*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

é chamado o vetor gradiente de f *em* (x_0, y_0)*.*
Seja $w = f(x, y, z)$ *uma função que admite derivadas parciais em* (x_0, y_0, z_0)*. O vetor*

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right)$$

é chamado o vetor gradiente de f *em* (x_0, y_0, z_0)*.*

Exemplo

Seja $f(x,y) = x^2y^2 + x - y + 1$. *Calcule* $\nabla f(1,0)$

solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x^2y - 1$$

Assim,

$$\nabla f(1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \right) = (1,-1)$$

Exemplo

Seja $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz + x + y + z$. *Calcule* $\nabla f(0,0,0)$

solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + yz + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3y^2 + xz + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + xy + 1$$

Assim,

$$\nabla f(0,0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0), \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) \right) = (1,1,1)$$

Regra da cadeia

Teorema

Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *aberto e* $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) \in \Omega$ *para todo* t *no intervalo* I. *Suponha* γ *for diferenciável em* t_0 *e* f *em* $\gamma(t_0)$. *Então a composta* $F(t) = f(\gamma(t))$ *será diferenciável em* t_0 *e vale a regra da cadeia*

$$F'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)).\gamma'(t_0)$$

onde $.$ *denota o produto escalar.*

Observação:

1) Fazendo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ então $\gamma'(t) = \left(\dfrac{dx}{dt}(t), \dfrac{dy}{dt}(t)\right)$ e

$$\nabla f(\gamma(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)\right)$$

portanto pela regra da cadeia

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)\frac{dy}{dt}(t).$$

Escrevemos

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}.$$

2) Vale fórmulas análogas para funções de três variáveis. Se $w = f(\gamma(t))$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ funções diferenciais então

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Exemplo

Seja $z = y^2 - 2xy$, $x = t^2$ *e* $y = \sin t$. *Calcule* $\frac{dz}{dt}$

solução:

Primeiro modo:

$$z = y^2 - 2xy,\ \ x = t^2,\ \ y = \sin t \Rightarrow z = \sin^2 t - 2t^2 \sin t$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = 2\sin t \cos t - 4t \sin t - 2t^2 \cos t$$

Segundo modo: Pela regra da cadeia

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2x,\ \frac{dx}{dt} = 2t,\ \frac{dy}{dt} = \cos t$$

Logo,

$$\frac{dz}{dt} = -2y2t + (2y - 2x)\cos t = (-2\sin t)2t + (2\sin t - 2t^2)\cos t$$

$$= 2\sin t \cos t - 4t\sin t - 2t^2\cos t$$

Exemplo

Seja $g(t) = f(t, \cos t)$ *onde* f *é uma função diferenciável. Expresse* $g'(t)$ *em função das derivadas parciais de* f.

solução: Temos que $g(t) = f(x, y)$ onde $x = t$ e $y = \cos t$. Pela regra da cadeia temos

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(t, \cos t) - \frac{\partial f}{\partial y}(t, \cos t)\,\sin t$$

Teorema

Suponha que $z = f(x, y)$ função diferenciável e $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ também funções diferenciáveis. Então

a)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

b)

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Demonstração: a) Seja $z(u, v) = f(x, y)$. Para calcular $\frac{\partial z}{\partial u}$ basta aplicar a regra da cadeia, olhando v como constante, deste modo

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

b) a) Seja $z(u, v) = f(x, y)$. Para calcular $\frac{\partial z}{\partial v}$ basta aplicar a regra da cadeia, olhando u como constante, deste modo

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Exemplo

Seja $z = x^2 + y^2$ *onde* $x = r\cos\theta$ *e* $y = r\sin\theta$*. Calcule* $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ *e* $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$.

solução:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = 2x\cos\theta + 2y\sin\theta$$

$$= 2r\cos^2\theta + 2r\sin^2\theta = 2r$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -2x\sin\theta + 2y\cos\theta$$

$$= -2r\cos\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta$$

Teorema

Suponha que $f(x, y)$ de classe C^1 em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e (x_0, y_0) um ponto da curva de nível $f(x, y) = k$ e $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Então $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular em (x_0, y_0) a toda curva γ, diferenciável, passando por (x_0, y_0) e cuja a imagem esteja contida na curva de nível $f(x, y) = k$.

Demonstração:

Seja $\gamma(t)$, $t \in I$ diferenciável, $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ e cuja a imagem esteja contida na curva de nível $f(x, y) = k$. Então $f(\gamma(t)) = k$ para todo $t \in I$. Deste modo, $\frac{d}{dt}(f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}(k) = 0$, ou seja, pela regra da cadeia obtemos $\nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t) = 0$, $t \in I$. Portanto

$$\nabla f(\gamma(t_0)).\gamma'(t_0) = 0,$$

ou seja, $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicuar a γ, em $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$.