Aula de Exercícios

1) Tempo de Vida de uma lavadora de roupas
Distribuição Normal: Média 3,1 anos
Desvio Padrão 1,2 anos

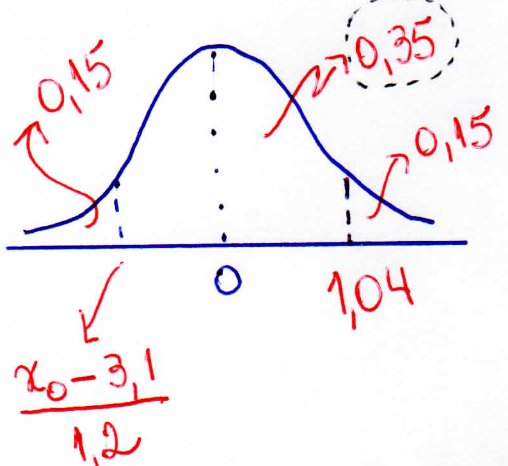
a) Qual deve ser o valor do tempo de garantia para que no máximo 15% das vendas exijam substituição?

b) Se a garantia for de 1 ano, que porcentagem das vendas exigirá substituição?

X - tempo de vida tempo de garantia - x_0

$X \sim N(3{,}1;\ 1{,}2^2)$ Haverá substituição se $X < x_0$

a) $P(X < x_0) = 0{,}15 \Rightarrow P\Bigg(\underbrace{\frac{X-3{,}1}{1{,}2}}_{Z \sim N(0,1)} < \frac{x_0 - 3{,}1}{1{,}2}\Bigg) = 0{,}15$



$\frac{x_0 - 3{,}1}{1{,}2} = -1{,}04 \Rightarrow x_0 = 1{,}852$

b) $P(X < 1) = P\left(Z < \frac{1-3{,}1}{1{,}2}\right) = P(Z < -1{,}75) = 0{,}5 - 0{,}4599$
$= 0{,}0401$

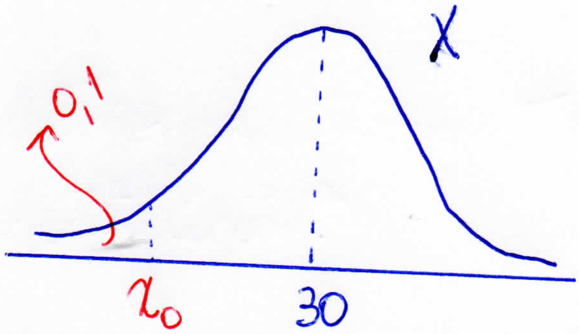
2) Ex 33 Cap. 6 Magalhães e Lima

X - Precipitação pluviométrica mensal (em mm)

$X \sim N(30, 16)$

a) Qual é o valor da precipitação tal que, com 10% de probabilidade, ocorra precipitação inferior a esse valor?

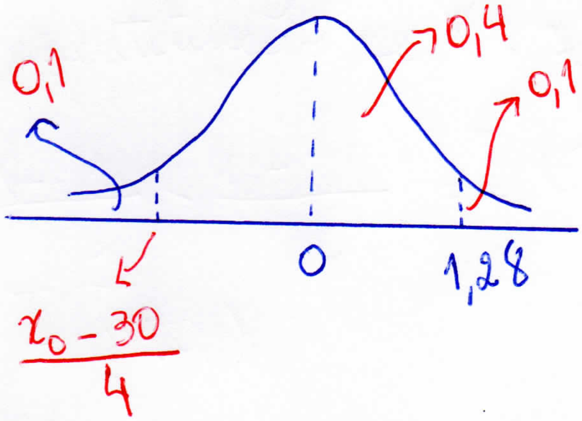
$x_0 \mid P(X \leq x_0) = 0{,}1$



$P\left(Z \leq \frac{x_0 - 30}{4}\right) = 0{,}1$

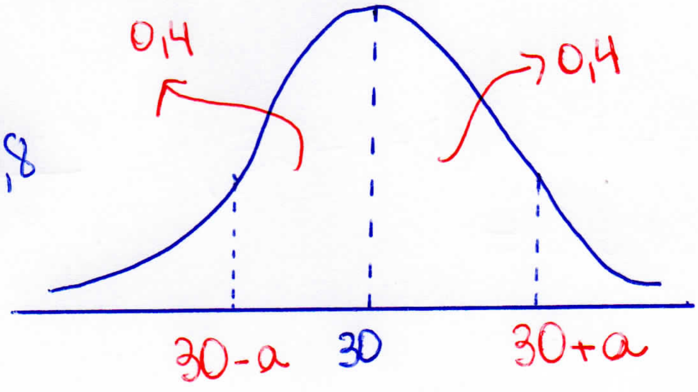
$\frac{x_0 - 30}{4} = -1{,}28$

$x_0 = 24{,}88$ mm



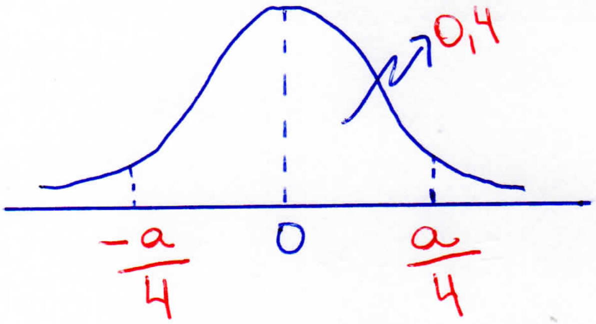
b) Intervalo central em torno da média contendo 80% dos valores

$P(30 - a \leq X \leq 30 + a) = 0{,}8$



$$P\left(\frac{30-a-30}{4} \leq Z \leq \frac{30+a-30}{4}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-a}{4} \leq Z \leq \frac{a}{4}\right) = 0{,}8 \qquad Z \sim N(0,1)$$



$$\frac{a}{4} = 1{,}28 \qquad a = 5{,}12$$

Intervalo: $[30-5{,}12\,;\,30+5{,}12] = [24{,}88\,;\,35{,}12]$

c) Supondo $X \sim N(30,16)$ para próximos 50 meses, em quantos meses se espera precipitação superior a 34 mm?

Y - nº de meses com precipitação superior a 34 mm

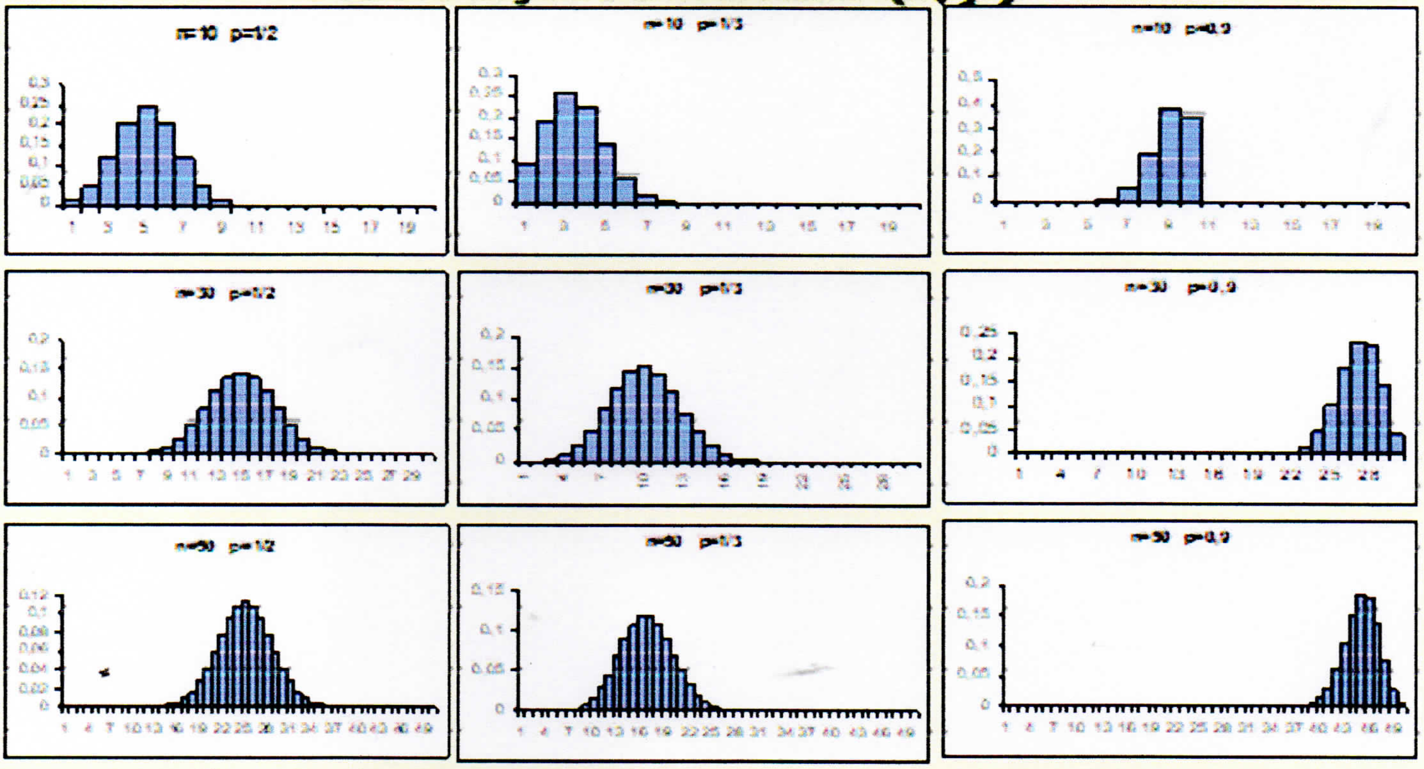
$Y \sim B(50, p) \qquad p = P(S) = P(\text{precipitação mensal} > 34)$

$$= P(X > 34) = P\left(Z > \frac{34-30}{4}\right) = P(Z > 1) =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$$

$$E(Y) = np = 50 \cdot 0{,}1587 = 7{,}935 \simeq 8 \text{ meses}$$

Distribuições binomiais (n, p)



⇨ Para p fixado, à medida que n cresce, os histogramas vão se tornando mais simétricos e com a forma da curva Normal.

3) Um sistema é formado por 100 componentes, cada um com confiabilidade (probabilidade de funcionar adequadamente em certo período) igual a 0,9. Se esses componentes funcionam de forma independente um do outro e se o sistema funcionar adequadamente se pelo menos 87 estiverem funcionando, qual é a confiabilidade do sistema? Usar a aproximação da binomial pela normal.

X – nº de componentes que funcionam adequadamente

$X \sim B(100, 0{,}9) \quad n = 100 \quad p = 0{,}9$

$E(X) = np = 100 . 0{,}9 = 90$

$Var(X) = np(1-p) = 100 \times 0{,}9 \times 0{,}1 = 9$

Confiabilidade do sistema: $P(X \geq 87)$

$P(X \geq 87) \simeq P(Y \geq 87) \qquad Y \sim N(90, 9)$

$$= P\left(\frac{Y-90}{3} \geq \frac{87-90}{3}\right) = P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1)$$

$Z \sim N(0,1)$

$= 0{,}5 + 0{,}3413 = 0{,}8413$

4) Prova de 20 testes, 4 alternativas cada.
Aluno vai responder ao acaso.
- Probabilidade de acertar 50% ou mais.
- Repetir para 40 testes com 4 alternativas.
- Idem para 40 testes com 5 alternativas

X - nº de acertos entre os 20 testes

$X \sim B(20; 0,25)$

$p = P(\text{acerto em cada questão}) = \frac{1}{4} = 0,25$

$\Rightarrow E(X) = np = 5 \qquad Var(X) = np(1-p) = 3,75$

$P(X \geq 10) \simeq P(Y \geq 10) \qquad Y \sim N(5; 3,75) \quad Z \sim N(0,1)$

$= P\left(\frac{Y-5}{1,93} \geq \frac{10-5}{1,93}\right) = P(Z \geq 2,59) = 0,0048$

Para 40 testes com 4 alternativas

$X \sim B(40; 0,25) \Rightarrow E(X) = np = 10$

$Var(X) = np(1-p) = 7,5$

$P(X \geq 20) \simeq P(Y \geq 20) \qquad Y \sim N(10;\ 7{,}5)$

$= P\left(\frac{Y-10}{2{,}75} \geq \frac{20-10}{2{,}75}\right) = P(Z \geq 3{,}63) = 0{,}0001$

Para 40 testes com 5 alternativas cada

$X \sim B(40;\ 0{,}20)$

$p = P(\text{acerto em cada questão}) = \frac{1}{5} = 0{,}2$

$E(X) = np = 8 \qquad Var(X) = np(1-p) = 6{,}4$

$P(X \geq 20) \simeq P(Y \geq 20) \qquad Y \sim N(8;\ 6{,}4)$

$P\left(Z \geq \frac{20-8}{2{,}53}\right) = P(Z \geq 4{,}74) \simeq 0{,}0000$

Exercícios de Estimação

1) $X \sim$ Bernoulli(p)

p - desconhecido

Estimar p com base em uma amostra casual simples com reposição (= amostra aleatoria) de tamanho 2.

$\Rightarrow X_1, X_2$ independentes $X_i \sim$ Bernoulli (p)

Estimadores : $T_1 = 0{,}4X_1 + 0{,}6X_2$

$T_2 = 0{,}8X_1 + 0{,}2X_2$

Verifique se são não viciados. Qual é o mais eficiente?

$X \sim$ Bernoulli(p) $\Rightarrow$

X	0	1
$P(X=x)$		p

$E(X) = p \qquad Var(X) = p(1-p)$

Obs: A v.a. com distribuição $B(n,p)$ é uma soma de n v.a. com distribuição de Bernoulli (p) independentes. Para $n=1$, a binomial é uma Bernoulli.

Amostra aleatória $\Rightarrow X_1$ e X_2 são independentes
$n=2$

e identicamente distribuídos com a mesma distribuição de X.

$\therefore \; E(T_1) = E(0{,}4X_1 + 0{,}6X_2) = 0{,}4E(X_1) + 0{,}6E(X_2) =$

$= 0{,}4p + 0{,}6p = p$

$E(T_2) = E(0{,}8X_1 + 0{,}2X_2) = 0{,}8E(X_1) + 0{,}2E(X_2) =$

$= 0{,}8p + 0{,}2p = p$

T_1 e T_2 são não viciados

$Var(T_1) = Var(0{,}4X_1 + 0{,}6X_2) \overset{indep}{=} Var(0{,}4X_1) + Var(0{,}6X_2)$

$= 0{,}4^2 Var(X_1) + 0{,}6^2 Var(X_2) = 0{,}16p(1-p) + 0{,}36p(1-p) =$

$= 0{,}52p(1-p)$

$Var(T_2) = Var(0{,}8X_1 + 0{,}2X_2) \overset{indep}{=} 0{,}8^2 Var(X_1) + 0{,}2^2 Var(X_2)$

$= 0{,}64 Var(X_1) + 0{,}04 Var(X_2) = 0{,}68p(1-p)$

$Var(T_1) < Var(T_2) \Rightarrow T_1$ é mais eficiente que T_2.

$\hookrightarrow$ Essa comparação só faz sentido pq. ambos são não viciados

2) Nas condições do exercício 1),

Considere $T = aX_1 + bX_2$

a) Prove que T é não viciado $\Leftrightarrow a+b=1$

b) Se $T = aX_1 + (1-a)X_2$, determine o valor de a que maximiza a eficiência de T.

a) $E(T) = E(aX_1 + bX_2) = aE(X_1) + bE(X_2) = ap + bp$

$= p(a+b) = p \quad \Leftrightarrow a+b=1$

b) $T = aX_1 + (1-a)X_2$ é não viciado pois $a+1-a=1$

$$Var(T) \overset{ind}{=} Var(aX_1) + Var[(1-a)X_2] =$$

$$= a^2 Var(X_1) + (1-a)^2 Var(X_2) =$$

$$= a^2 p(1-p) + (1-2a+a^2)p(1-p)$$

$$= [p(1-p)][2a^2 - 2a + 1] = f(a)$$

$f'(a) = (4a-2)p(1-p) \qquad f'(a) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$f''(a) = 4p(1-p) > 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ é ponto de mínimo

Máxima eficiência $\Rightarrow T = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$

3) Considere uma v.a. X com $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$. Se $X_1, X_2 \dots X_n$ é uma amostra aleatória de X, prove que $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ é um estimador não viciado para μ e $Var(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

Amostra aleatória $\Rightarrow$ $X_1, X_2 \dots X_n$ são v.a. independentes com a mesma distribuição de X

$$E(\bar{X}) = E\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n} E\left[X_1 + X_2 + \dots + X_n\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)\right] = \frac{1}{n}\left[\mu + \mu + \dots + \mu\right] =$$

$$= \frac{n\mu}{n} = \mu.$$

$\therefore$ $\bar{X}$ é um não viciado de μ.

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2}\left[Var(X_1) + Var(X_2) + \dots Var(X_n)\right]$$

indep. $X_1, X_2 \dots X_n$

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Para n grande, $\bar{X}$ é altamente concentrado em torno de sua média, que é μ, o parâmetro que desejamos estimar.