Exercícios - Cálculo IV - Aula 6 - Semana 28/9 - 2/10
Séries de Potências

Uma série de potências centrada em $x_0 \in \mathbb{R}$ é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n + \cdots .$$

Vimos na lista de exercícios da aula 5 que três tipos de comportamentos são os únicos obtidos para uma série de potências centrada em x_0, isto é, vale uma das alternativas abaixo

- converge para todo $x \in \mathbb{R}$,
- converge num intervalo centrado em x_0,
- só converge em x_0.

Teorema 1 *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$*. Então temos uma das alternativas abaixo:*

a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *converge somente se* $x = x_0$*.*

b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *converge para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

c) Existe $R > 0$ *tal que* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *converge absolutamente para todo* $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$ *e diverge se* $|x - x_0| > R$*.*

Observação 1 *Para $x = x_0 + R$ e $x = x_0 - R$ precisamos analisar cada série especificamente.*

Exemplo 1 *Consideremos a série de potências centrada em $x_0 = 0$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

onde $c_n = 1$ para todo $n \geq 0$. Esta é uma série geométrica de razão x, logo sabemos que converge para todo x desde que $|x| < 1$ e neste caso temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \frac{1}{1-x}$$

Assim esta série de potências de x representa a função $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ no intervalo $]-1, 1[$. É óbvio que $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ está definida para todo $x \neq 1$. Mas no intervalo $]-1, 1[$ ela também é descrita através da série geométrica.

Exemplo 2 *Consideremos a série de potências centrada em $x_0 = 1$ e $c_n = \dfrac{1}{n!}$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \cdots .$$

Denominando-se $a_n(x) = \dfrac{(x-1)^n}{n!}$ e aplicando-se o Critério da razão, para $x \neq 1$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x-1}{n+1}\right| = 0, \textit{qualquer que seja } x.$$

Portanto esta série descreve uma função $f(x)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Ainda não sabemos se $f(x)$ é alguma função conhecida.

Exemplo 3 *Consideremos agora a série centrada em $x_0 = 0$ dada por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} x^n.$$

Aplicando-se o Critério da raiz quando $x \neq 0$ vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^{n^2} x^n|} = \lim_{n\to\infty} 2^n |x| = \infty.$$

Logo esta série só converge se $x = 0$ e portanto, não representa uma função.

Raio de Convergência

Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$ dizemos que $R = \infty$ é seu **raio de convergência**.

Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ converge somente para $x = x_0$ dizemos que $R = 0$ é seu **raio de convergência**.

E se existe $R > 0$ tal que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ converge absolutamente para todo $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$ e diverge se $|x - x_0| > R$, dizemos que R é seu **raio de convergência**.

Exemplo 4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2x}{3})^n$ *é uma série geométrica. Logo sabemos convergir absolutamente se* $|2x/3| = 2|x|/3 < 1$ *e divergir se* $|2x/3| > 1$*. Logo* $R = 3/2$ *é seu raio de convergência.*

Aplicando o critério da razão para $x \neq x_0$ temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}(x - x_0)^{n+1}|}{|c_n (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$$

- Suponha que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L > 0$ então a série converge absolutamente para todo x tal que $|x - x_0|.L < 1$, ou seja, $|x - x_0| < 1/L$ e portanto o raio de convergência é $R = 1/L$.

- Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = 0 < 1$ então

  a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$ e portanto $R = \infty$ é seu raio de convergência.

- Se $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \infty$ então a série convergirá somente se $x = x_0$ e portanto $R = 0$ é seu raio de convergência.

O Prof. Possani usa a fórmula acima para o cálculo do raio de convergência. No entanto algumas referências usam a fórmula abaixo (inclusive na apostila da Prof. Janete).

> **Teorema 2** *Seja a série* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$.
> *a) (Critério* **inverso** *da razão) Suponha que*
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = R$$
>
> *então R é seu raio de convergência.*
> *b) (Critério* **inverso** *da raiz) Suponha que*
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = R$$
>
> *então R é seu raio de convergência.*

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$. Denominamos o seu **intervalo de convergência** como sendo o maior intervalo $I \subset \mathbb{R}$ para o qual a série converge.

Na apostila daProf. Janete Crema Simal você encontra as provas dos teoremas.

Exercício 1 *Determine o intervalo de convergência de cada uma das seguintes séries de potências:*

$a)\ \sum \frac{n!}{100^n}x^n$	$b)\ \sum \frac{2^n}{n^2}x^n$	$c)\ \sum(-1)^{n+1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$
$d)\ \sum \frac{(3n)!}{(2n)!}x^n$	$e)\ \sum \frac{x^{2n+1}}{(-3)^n}$	$f)\ \sum \frac{(x-3)^n}{n^2 2^n}$
$g)\ \sum \frac{3^n}{n4^n}x^n$	$h)\ \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}(x-3)^n$	$i)\ \sum \frac{\ln n}{e^n}(x-e)^n$
$j)\ \sum \frac{10^n}{(2n)!}(x-7)^n$	$k)\ \sum \frac{n}{4^n}x^{2n}$	$l)\ \sum \frac{x^n}{n^3+1}$
$m)\ \sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}2^n}x^n$	$n)\ \sum n^2x^n$	$o)\ \sum \frac{n^2}{2^{3n}}(x+2)^n$