APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

VOLUMES POR SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO, VOLUMES POR CASCA CILÍNDRICA

DISCIPLINA: CÁLCULO II (LOB1004)

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS BÁSICAS E AMBIENTAIS

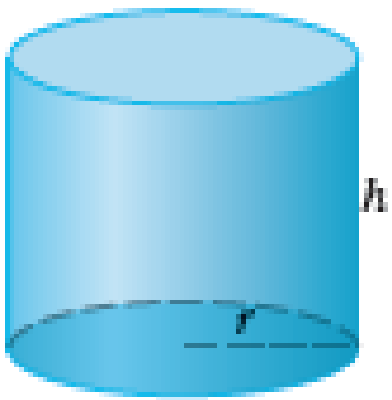
1- VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

Um sólido de revolução é gerado pela rotação de uma área plana em torno de uma reta chamada eixo de rotação, contida no plano. O volume de sólido de revolução pode ser calculado por três métodos.

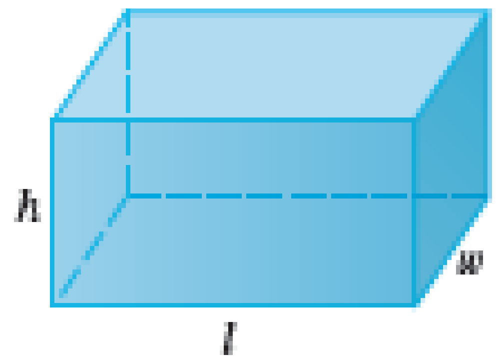
- ✓ **1.1 Método de Disco**
- ✓ **1.2 Método de Arruela**
- ✓ **1.3 Método de Casca Cilíndrica**

VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

Em particular, se a base é um círculo com raio r, então o cilindro é um cilindro circular com o volume V = πr^2h, Figura 1(b), e se a base é um retângulo com comprimento l e largura w, então o cilindro é uma caixa retangular (também denominado paralelepípedo retangular) com o volume V = lwh, Figura 1(c).



(b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$



(c) Caixa retangular $V = lwh$

VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

Seja A(x) a área da secção transversal de S no plano P_x perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, onde a ≤ x ≤ b. Fatiando a região S e passando por x, calculamos a área de uma fatia. A área da secção transversal A(x) irá variar quando x aumenta de a até b, Figura 2.

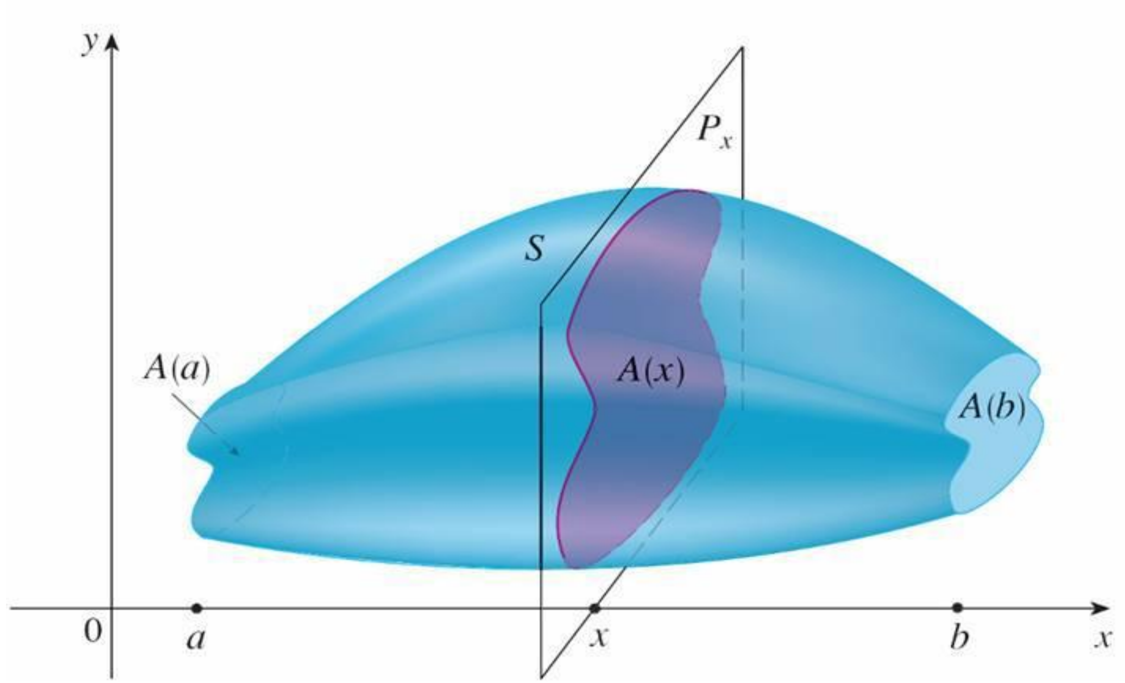


Figura 2

VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

Vamos dividir S em n "fatias" de larguras iguais Δx usando os planos P_{x_1}, P_{x_2}, para fatiar o sólido. Se escolhermos pontos amostrais x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$, poderemos aproximar a i-ésima fatia S_i (a parte de S que está entre os planos $P_{x_{i-1}}$ e P_{x_i}) a um cilindro com área de base $A(x_i^*)$ e "altura" Δx, conforme Figura 3.

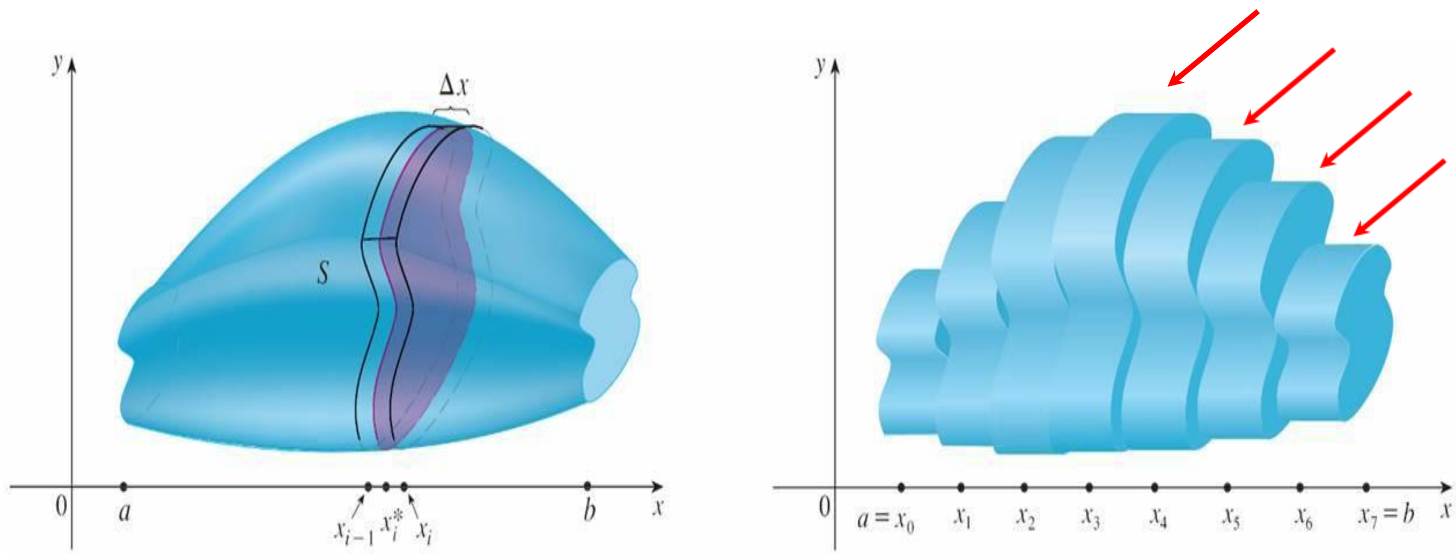
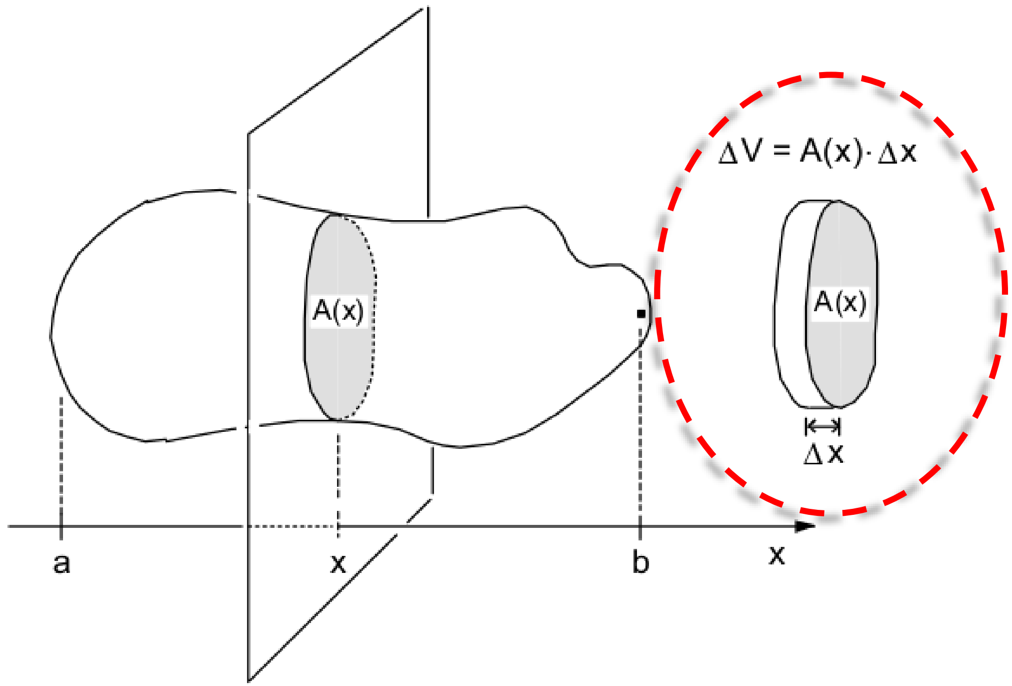


Figura 3

VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

Considere a Figura 4,



VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

Adicionando os volumes dessas fatias, obteremos uma aproximação para determinar o volume total (isto é, o que pensamos intuitivamente como volume):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$$

VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

A aproximação parece melhorar quando $n \to \infty$. Portanto, definimos o volume como o limite dessas somas quando $n \to \infty$. Mas reconhecemos o limite da soma de Riemann como uma integral definida, e dessa forma temos a seguinte definição.

Definição de volume Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o **volume** de S é

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*) \, \Delta x = \int_a^b A(x) \, dx.$$

1.1- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

Um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de um eixo no plano é denominado sólido de revolução. Para determinar o volume de um sólido, precisamos somente observar que <u>a área da seção transversal A(x) é um disco de raio R(x)</u>, a distância entre a fronteira da região bidimensional é o eixo de revolução. A área é portanto:

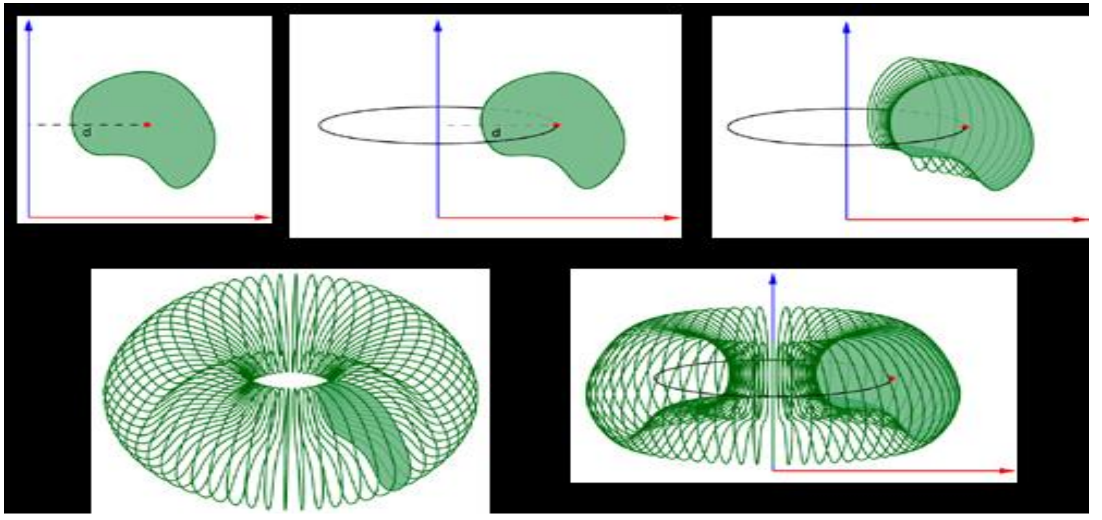
$$A(x) = \pi(\text{Raio})^2$$
$$A(x) = \pi\, R(x)^2$$

Com base na definição de volume, tem-se:

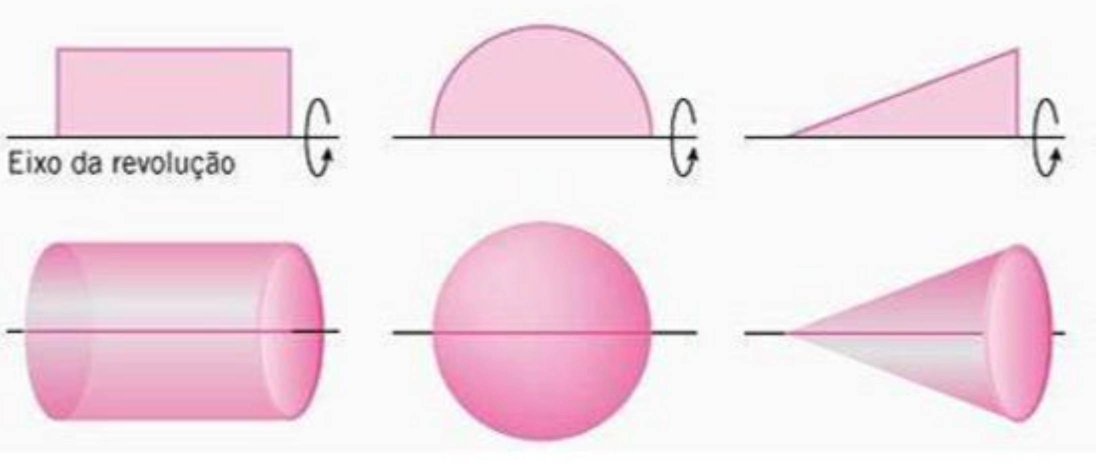
$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi\,[R(x)]^2$$

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

EIXO Y



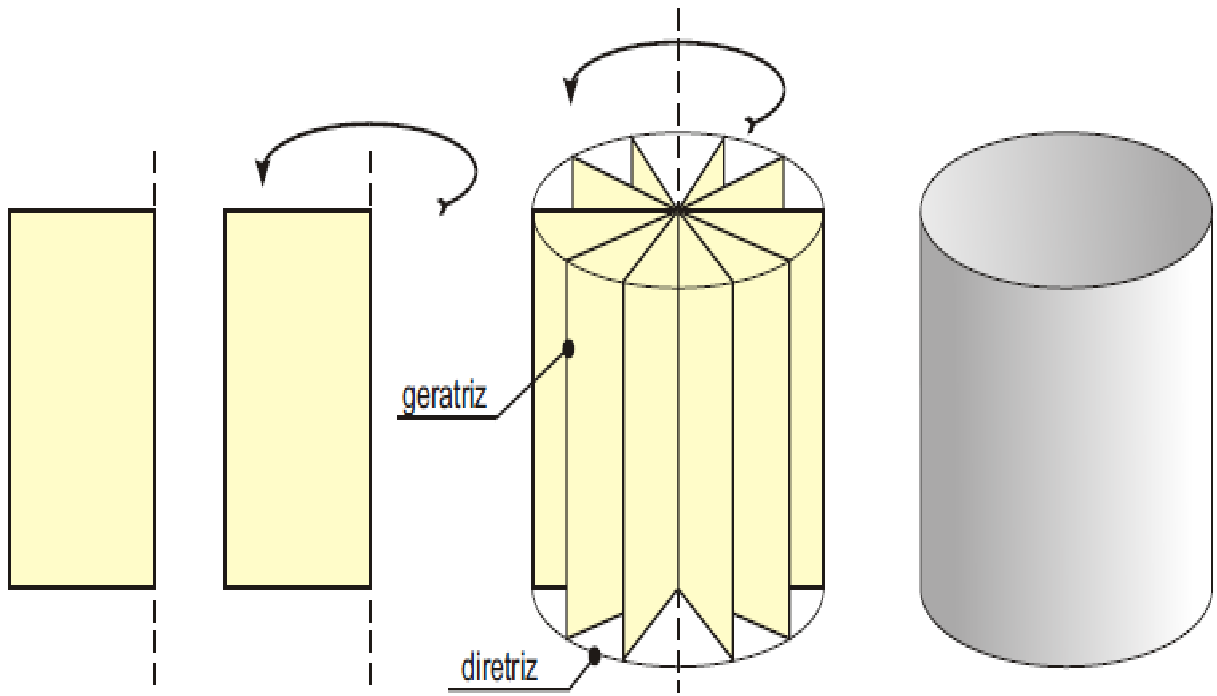
EIXO X



SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

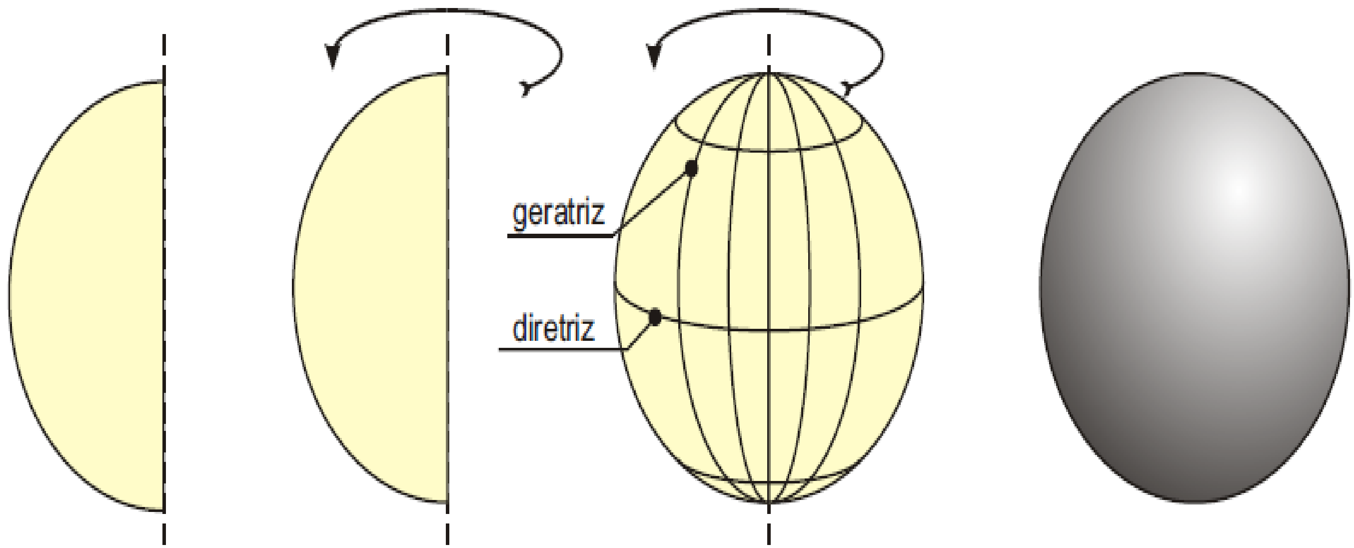
ALGUNS EXEMPLOS DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO:

Cilindro - Sólido de revolução gerado através da rotação de um retangulo em torno de um eixo coincidente com um de seus lados.



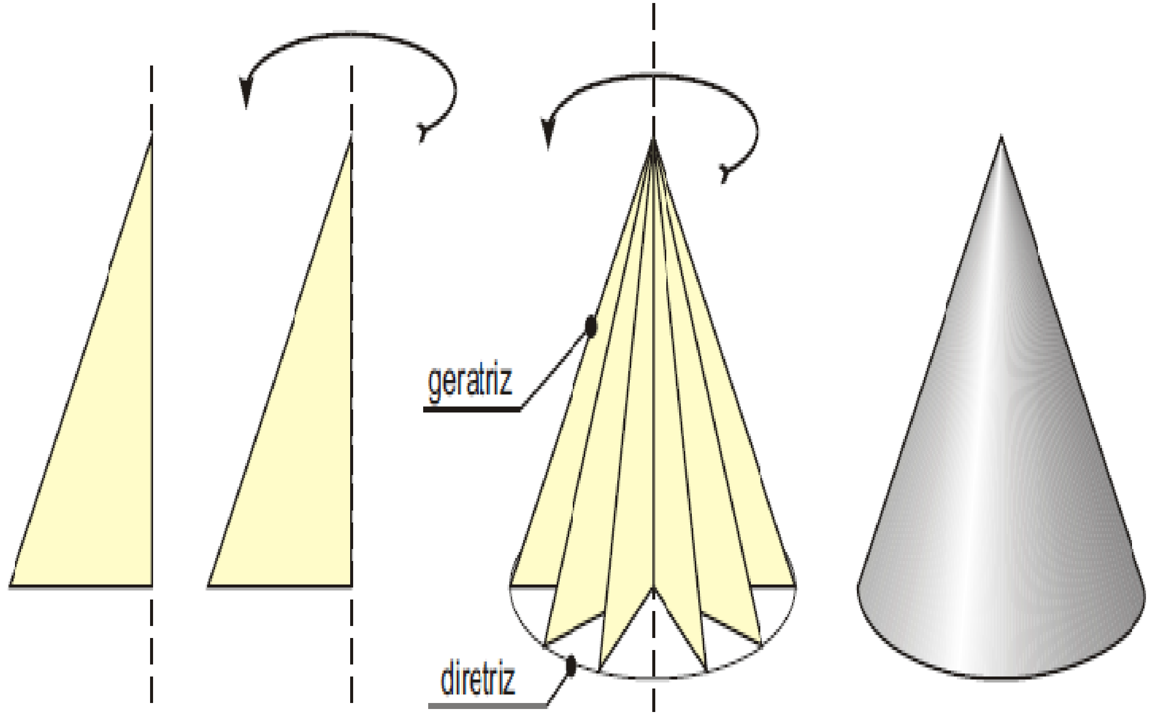
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

Esfera - Sólido de revolução gerado através da rotação de uma semi - circunferência em torno de um eixo coincidente com o diametro.



SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

Cone - Sólido de revolução gerado através da rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo coincidente com um de seus catetos.



SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

Definição 2: Seja f uma função contínua em [a, b] e seja R a região delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas verticais x=a e x=b.
O volume V do sólido gerado pela revolução de R em torno do eixo Ox é:

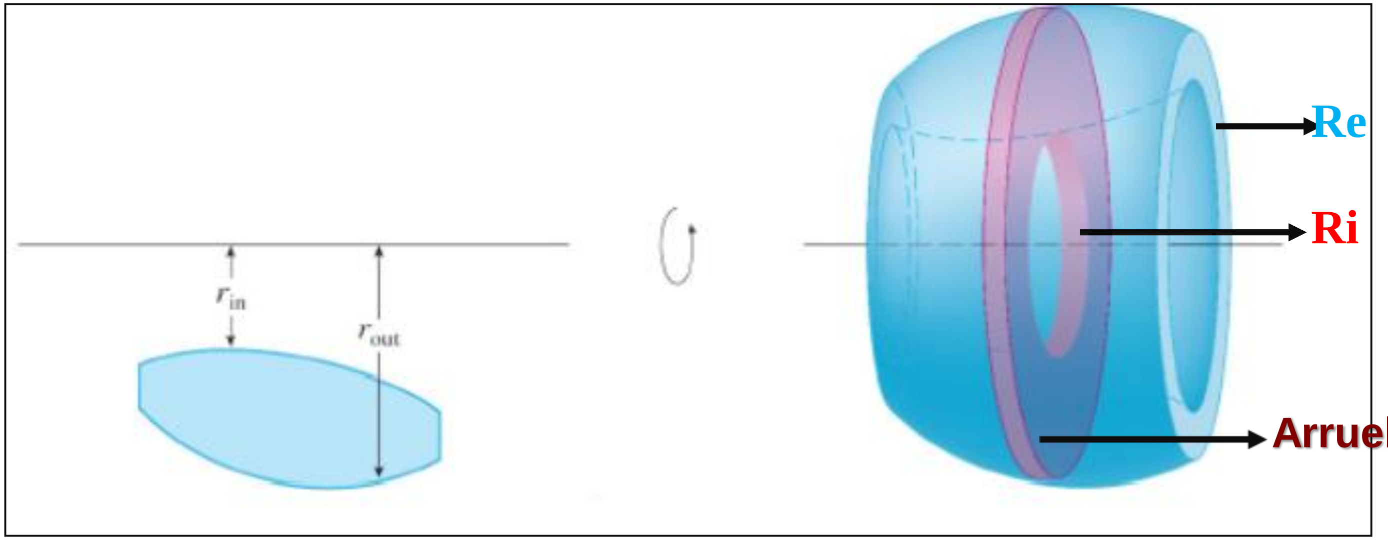
$$\boxed{V = \int_a^b \pi\,[f(x)]^2\,dx}$$

Se uma região revolve em torno de uma reta no plano, o sólido resultante é um sólido de revolução.

1.2- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO ANEL (ARRUELAS)

O método dos discos pode ser estendido para sólidos de revolução com buracos (orifícios), substituindo o disco representativo por um anel (arruela). A arruela é formada pela revolução de um retângulo em torno de um eixo (x ou y).

Consideraremos a região limitada por um raio externo R(x) e por um raio interno r(x), conforme a figura apresentada:

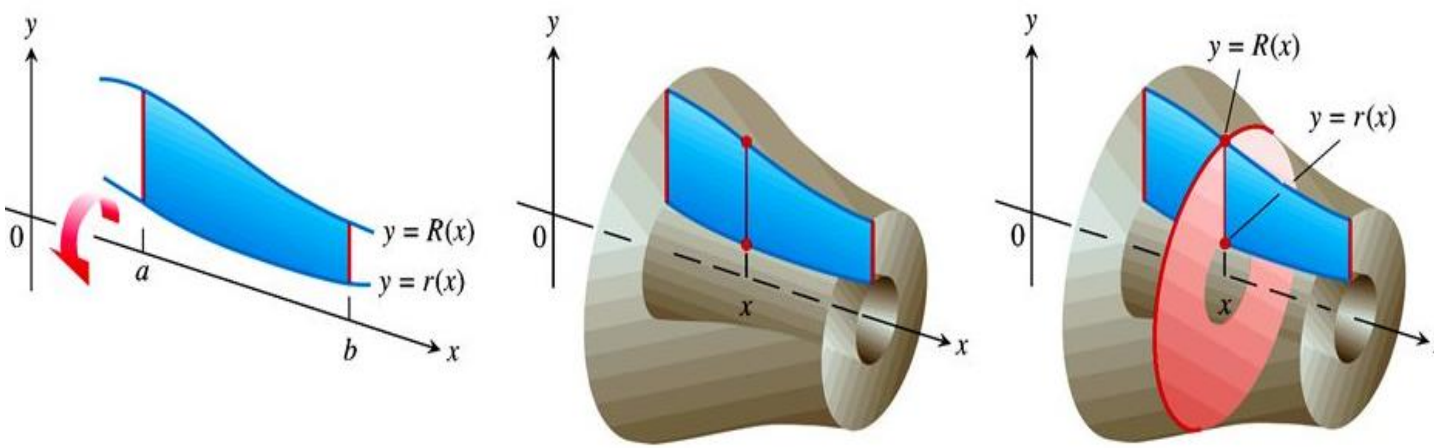


$$V = \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2$$

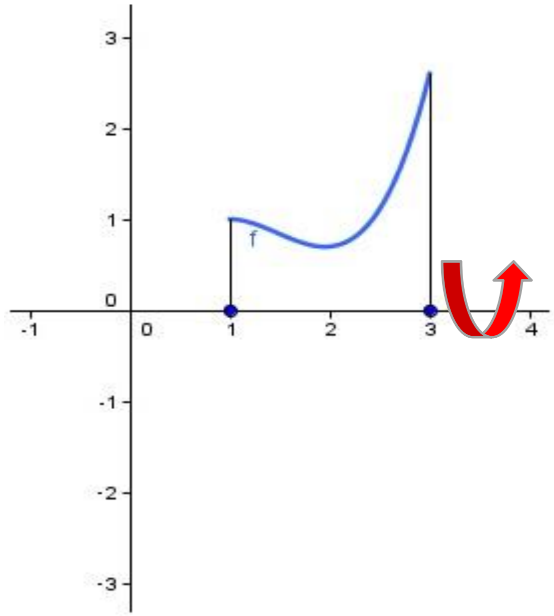
3- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO ANEL (ARRUELAS)

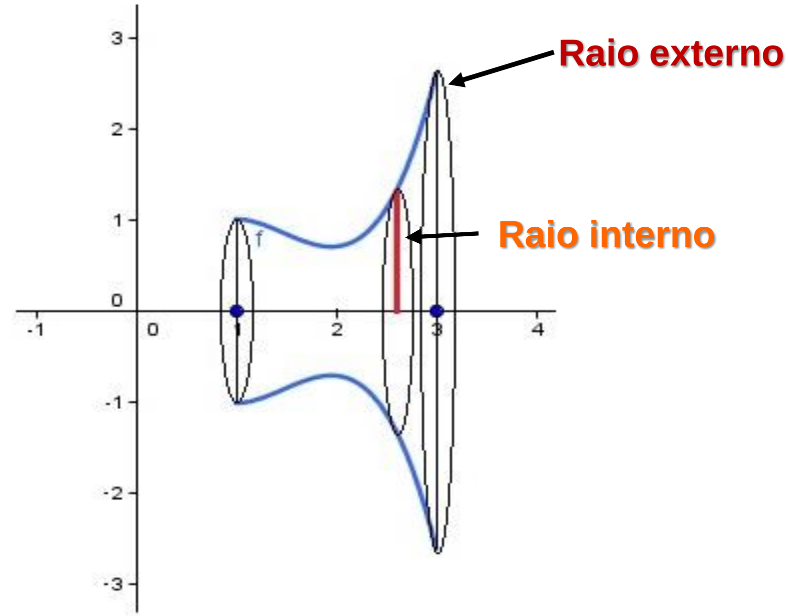
Se a região de sólido de revolução gira em torno do seu eixo de revolução o volume será expresso por:

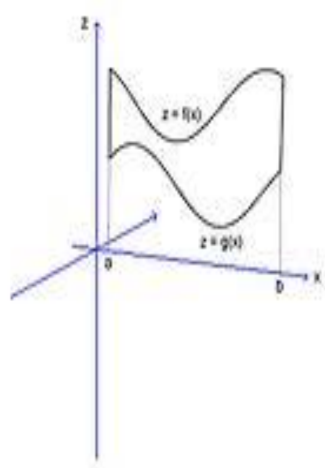
$$V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx$$

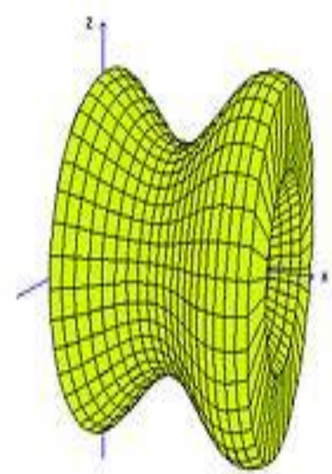


2- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO



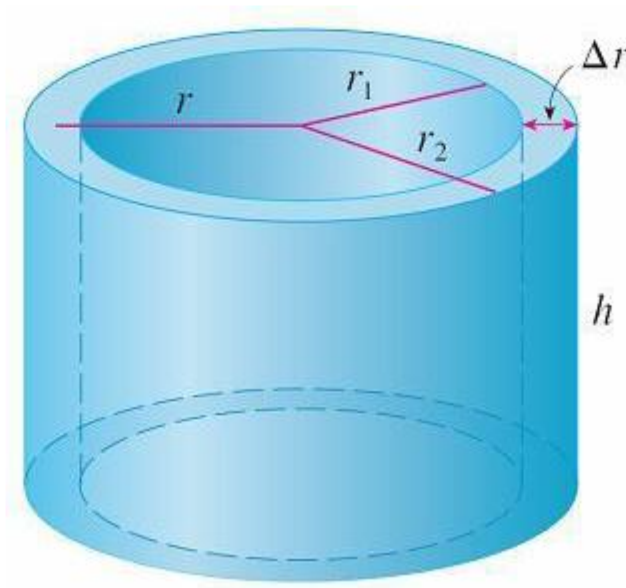






1.3- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

No método das cascas cilíndricas tomaremos o cilindro como exemplo e o consideraremos como um anel, conforme a figura:



A Figura acima apresenta uma casca cilíndrica com raio r_1 interno raio externo r_2 e altura h.

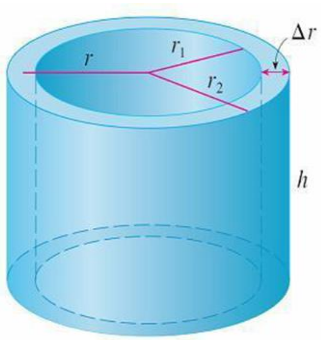
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

Seu volume V é calculado subtraindo o volume V_1 do cilindro interno a partir do volume V_2 do cilindro externo:

$$V = V_2 - V_1 = \pi\, r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi\, \boxed{(r_2^2 - r_1^2)}\, h$$

$$V = \pi\, (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h$$

$$V = 2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) \quad \Delta r \quad h$$



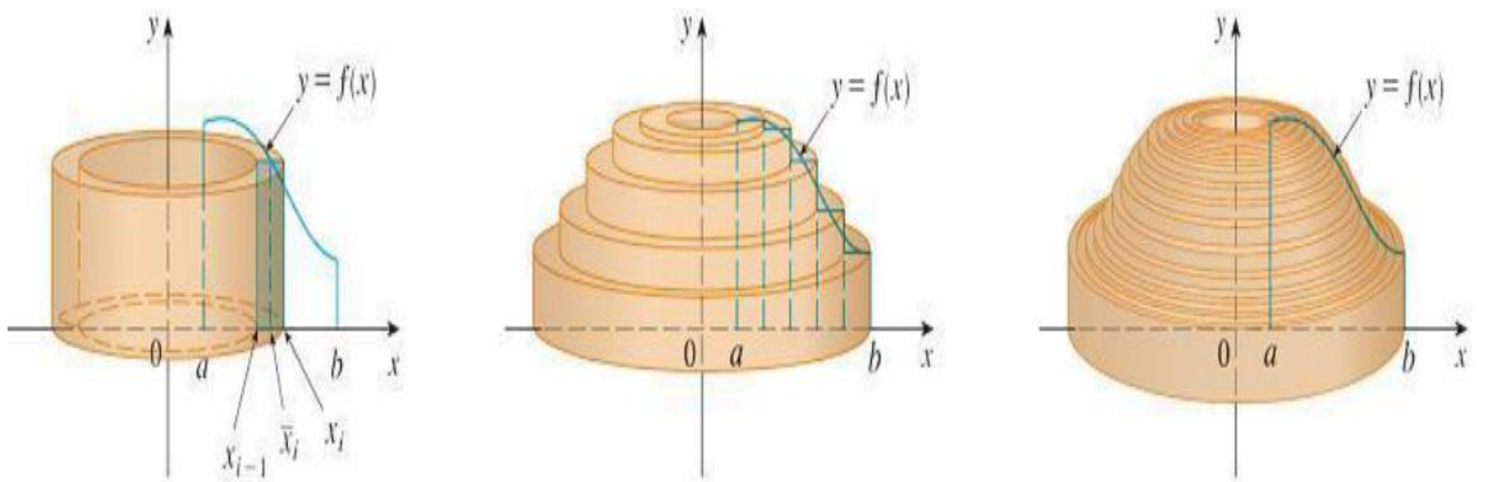
Logo a fórmula para o volume de casca cilíndrica será:

$$V = 2\pi\, r\,.h.\, \Delta r$$

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

Considerando as figuras abaixo, dividimos o intervalo [a, b] em n subintervalos [xi – 1, xi] da mesma largura Δx e consideramos o ponto médio do i -ésimo subintervalo.
Se o retângulo com base [x_{i-1}, x_i] e altura $f(x_i)$ é girado ao redor do eixo y, então o resultado é uma casca cilíndrica com raio médio, altura, e espessura Δx, assim, pela fórmula seu volume será:

$$V_i = \underbrace{(2\pi\bar{x}_i)}_{\text{Circunferência}}\underbrace{[f(\bar{x}_i)]}_{\text{Altura}}\underbrace{\Delta x}_{\text{Espessura}}$$



SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

Portanto, uma aproximação para o volume *V* de *S* é dada pela soma dos volumes dessas cascas:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\, \Delta x$$

Essa aproximação parece tornar-se cada vez melhor quando $n \to \infty$. Mas, pela definição de uma integral, sabemos que

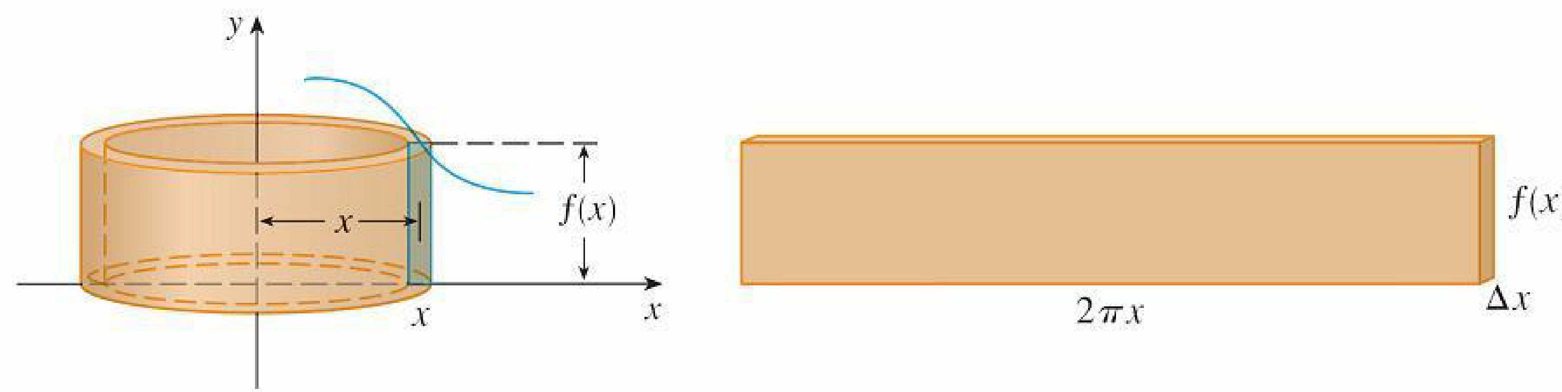
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\, \Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

Por definição:

O volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y ou do eixo x da região sob a curva y= f(x) de a até b, poderá ser expresso pelas seguintes equações:

$$V = \int_a^b (2\pi x).\ [h(x)] \quad dx$$



$$V = \int_a^b (2\pi y)[h(y)]dy$$

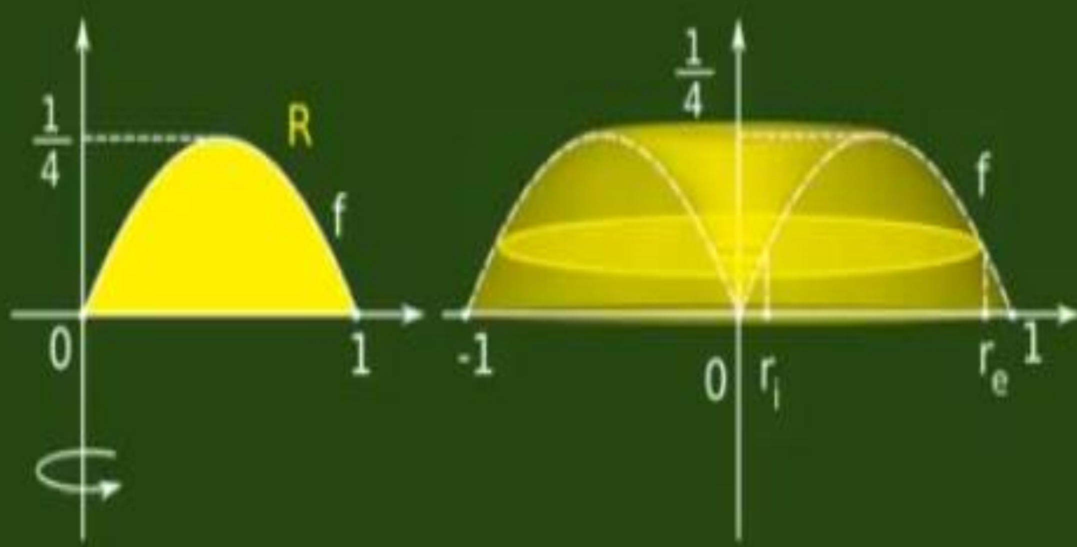
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

1. Desenhe a região e esboce um segmento de reta identificando o corte paralelo ao eixo de rotação. Encontre o raio e altura da casca cilíndrica.
2. Determine os limites de integração para a variável em questão.
3. Integre o produto de $2\pi \cdot$ raio $\cdot$ altura em relação a variável do problema.

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

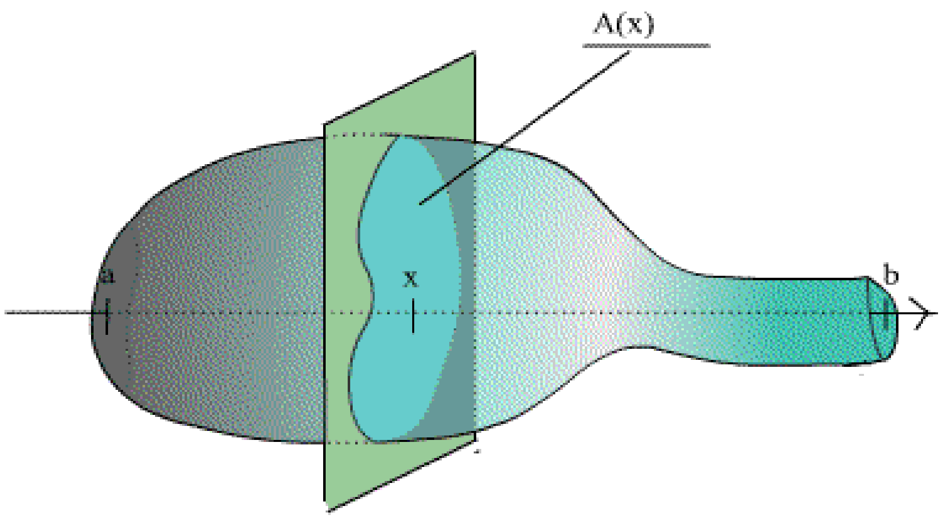
Considere o seguinte exemplo:

Considere que desejamos calcular o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região R delimitada entre o gráfico de $f(x) = -x^2 + x$ e o eixo x.



5- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR SEÇÕES TRANSVERSAS

Consideraremos agora um sólido que para todo x em [a, b], o plano perpendicular ao eixo-x em x intercepta o sólido em uma seção transversa, cuja área é A(x), onde A é uma função contínua em [a, b]. Considere a figura abaixo:



5- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR SEÇÕES TRANSVERSAS

18- Os eixos de dois cilindros circulares retos de raio a se interceptam em ângulo reto. Ache o volume do sólido delimitado pelos cilindros.