Relações (binárias)

- Aparecem sempre em matemática.

Alguns exemplos: · $x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$ · $y = \text{sen}(5x+3)$, $x \in \mathbb{R}$

· $r \perp s$, r, s retas · $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \in \mathbb{R}$

(sabem dar mais exemplos?)

- Os principais "tipos de relações" que aparem nos cursos que fizeram são: funções, relações de equivalência, ordens. Estudaremos esses três "tipos de relações" depois.

- Uma relação não necessariamente precisa ser definida (dada) por uma propriedade que conseguimos escrever ou por uma fórmula (assim como era no caso das funções). Podemos, por exemplo, ter uma relação que associa alguns números naturais a outros números naturais de uma forma aleatória.

- Problema: Como definir uma relação?

Exemplo: $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$ $\quad x < y$, $x \in A$, $y \in B$

As possibilidades são: $\underset{(1,2)}{1 < 2}$ $\quad \underset{(1,4)}{1 < 4}$ $\quad \underset{(3,4)}{3 < 4}$ → podemos associar cada possibilidade a um par ordenado

$x < y \rightsquigarrow \{(x,y) \in A \times B : x < y\}$

relação $\rightsquigarrow$ conjunto de pares ordenados

- A relação fica caracterizada pelos pares ordenados (nem sempre por uma "propriedade", podemos ter duas "propriedades"/fórmulas diferentes, que dão origem aos mesmos pares ordenados, nesse caso as duas relações são iguais, ou seja, é uma só (análogo a ter duas fórmulas diferentes mas que dão o mesmo gráfico de uma função, apesar das fórmulas serem (aparentemente) diferentes, a função é a mesma).

- Essa discussão foi para motivar:

Def.: Sejam A e B dois conjuntos. Uma relação (binária) entre A e B é um conjunto $R \subset A \times B$.
- Se $A = B$, ou seja, se $R \subset A \times A$, dizemos que R é uma relação em A

- Assim, uma relação é um conjunto de pares ordenados.

Notação: $(x,y) \in R$ é geralmente escrito da forma xRy
↳ mais usual, é a que usaremos mais

- O conceito de "relação" aqui não é diferente do que já conhecemos, mas ele está sendo visto de uma forma diferente (visto mais como conjuntos e menos como "regrinha")

Exemplos:

1) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ 

2) $R = \{(1,3), (1,5), (3,5), (7,13)\}$

3) as funções, por exemplo, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x + 7\}$

(função = gráfico da função)

(E poderia dar muito mais exemplos, fica para vocês pensarem em outros exemplos).

. Duas relações tem um interesse especial:

Definição: Seja A um conjunto.

a) A relação de pertinência $(\in)$ em A é definida por

$$\in_A = \{(x,y) \in A \times A : x \in y\}$$

b) A relação de igualdade em A é

$$=_A = \{(a,b) \in A \times A : a = b\} = \{(a,a) : a \in A\}$$

Exemplo: Se $A = \{a, \{a\}, \{a,b\}\}$, então

$$\in_A = \{(a,\{a\}), (a,\{a,b\})\} \text{ e}$$

$$=_A = \{(a,a), (\{a\},\{a\}), (\{a,b\},\{a,b\})\}$$

• Vamos agora definir a terminologia e conceitos básicos associados às relações.

Def: Se $R \subset A \times B$ definimos:

$$Dom\,R = \{x \in A : \exists y \in B \text{ tal que } xRy\} = \text{domínio de } R$$

$$Im\,R = \{y \in B : \exists x \in A \text{ tal que } xRy\} = \text{imagem de } R$$

Obs: Se $R \subset A \times B$, temos $Dom\,R \subset A$ e $Im\,R \subset B$.

Exemplos: 1) $R = \{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : n \mid m\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

$Dom\,R = \mathbb{N}^*$ e $Im\,R = \mathbb{N}^*$ ($n \mid n$, se $n \neq 0$, logo $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n \in Dom\,R$ e $n \in Im\,R$)

2) $R = \{(1,5), (3,8), (5,4), (7,3)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$Dom\,R = \{1, 3, 5, 7\}$ $\quad Im\,R = \{3, 4, 5, 8\}$

3) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{x^2}\}$

$Dom\,R = \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad Im\,R = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$

Def: Suponha $R \subset X \times Y$, $A \subset X$ e $B \subset Y$. Definimos:

(a) A imagem de A por R é o conjunto

$$R[A] = \{y \in Im\,R : \exists x \in A \text{ t.q. } xRy\}$$

(b) A imagem inversa de B por R é o conjunto

$$R^{-1}[B] = \{x \in dom\,R : \exists y \in B \text{ t.q. } xRy\}$$

Obs: 1. Se $R \subset X \times Y$, $A \subset X$ e $B \subset Y$, então $R[A] \subset Y$ e $R^{-1}[B] \subset X$.

2. As notações $R(A)$ e $R^{-1}(B)$ também são usadas.

Exemplos:

1. $R = \{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : n \mid m\}$

$A = \{2,3\}$ $\quad R[A] = \{2k : k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{3k : n \in \mathbb{N}^*\}$

$B = \{6,7\}$ $\quad R^{-1}[B] = \{1, 2, 3, 6, 7\}$ (divisores de 6 e de 7)

2. $R = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n < m\}$

$A = \{3\}$ $\quad R[A] = \{m \in \mathbb{N} : m > 3\}$

$B = \{3\}$ $\quad R^{-1}[B] = \{0, 1, 2\}$

3. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^4\}$

$A =]-1, 1[$ $\quad R[A] = [0, 1[$

$B = [-2, 1]$ $\quad R^{-1}[B] = [-1, 1]$

. Vamos agora definir relação inversa

Def: Seja R uma relação entre A e B. A relação inversa de R, que será denotada por R^{-1}, é a relação entre B e A definida por

$$R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A : (x,y) \in R\}$$

Obs: $R \subset A \times B \iff R^{-1} \subset B \times A$

$x R y \iff y R^{-1} x$

Exemplos: 1) $R = \{(3,5), (7,18), (9,11)\}$

$R^{-1} = \{(5,3), (18,7), (11,9)\}$

2) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$

$R^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$

3) $R = \{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : n \mid m\}$

$R^{-1} = \{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : m \mid n\}$

Obs: Suponha $R \subset A \times B$ e $Y \subset B$. Então

$R^{-1}[Y] = \{x \in A : \exists y \in Y$ t.q. $x R y\} =$

$= \{x \in A : \exists y \in Y$ t.q. $y R^{-1} x\} = (R^{-1})[Y]$.

Logo não há ambiguidade na notação $R^{-1}[Y]$ (a imagem inversa de Y por R é igual a imagem de Y por R^{-1}; $R^{-1}[Y]$ denota as duas coisas).

Operações entre relações

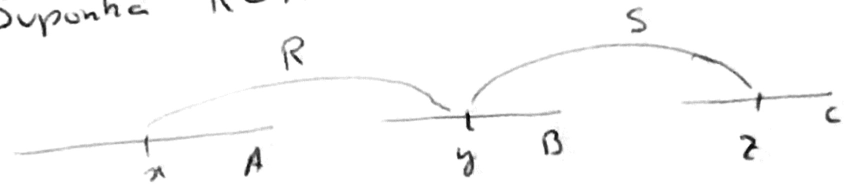
- Relações são conjuntos, então, dadas duas relações R e S, podemos fazer as operações usuais de conjuntos:

$R \cup S$, $R \cap S$ e $R \setminus S$

- A operação diferente que temos, é a composição.

Composição (de relações)

Suponha $R \subset A \times B$ e $S \subset B \times C$



$(x,y) \in R$

$(y,z) \in S$

Def: Definimos a relação composta $T \subset A \times C$ por

$$T = S \circ R = \{(x,z) \in A \times C : \exists y \in B \text{ t.q. } (x,y) \in R \text{ e } (y,z) \in S\}$$

Exemplos:

1. $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 6\}$,

$R = \{(1,3), (2,3), (1,4)\}$ e $S = \{(3,3), (2,6), (3,4)\}$

$S \circ R = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

$R \circ S = \emptyset$

2. $A = B = C = \mathbb{R}$

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ e $S = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = z\}$

$S \circ R = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 ; \exists y \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x + y = 1 \text{ e } y^2 = z\} =$

$= \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : \exists y \in \mathbb{R} \text{ t.q. } y = 1 - x \text{ e } y^2 = z\} =$

$= \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : (1-x)^2 = z\}$

//

- Para algumas propriedades de $R[A]$ e $R^{-1}[A]$ (junto com $\cup, \cap$ e $\setminus$) e alguns exercícios básicos, ver TIC4 ("Relações"). Para mais exercícios, ver a Lista 2.
- Vou resolver 1a) de TIC4 (mas tente sozinho antes).

Exercício: Mostre que $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$, onde $R \subset X \times Y$, $A \subset X$ e $B \subset X$.

Resolução:

Temos que mostrar que $\forall x \, (x \in R[A \cup B] \Leftrightarrow x \in R[A] \cup R[B])$

De fato, dado x qualquer,

$$x \in R[A \cup B] \overset{\text{def de } R[A \cup B]}{\Longleftrightarrow} \exists \, x \in A \cup B \text{ tal que } xRy$$

$$\overset{\text{def de } \cup}{\Longleftrightarrow} \exists \, x \text{ tal que } x \in A \text{ ou } x \in B \text{ satisfazendo } xRy$$

$$\Longleftrightarrow (\exists \, x \in A \text{ tal que } xRy) \text{ ou } (\exists \, x \in B \text{ tal que } xRy)$$

$$\overset{\text{def } R[A] \text{ e } R[B]}{\Longleftrightarrow} x \in R[A] \text{ ou } x \in R[B]$$

$$\overset{\text{def } \cup}{\Longleftrightarrow} x \in R[A] \cup R[B].$$