TEORIA DOS CONJUNTOS - LISTA 2

1. Pares ordenados e produto cartesiano

1. Dados $U = [-2,2] \cup [3,5]$, $A = [-1,1]$ e $B = [0,2] \cup [3,4]$, ilustrar graficamente os conjuntos: $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $(A \times A) \cap (B \times B)$, $(A \times A) \cup (B \times B)$, $(A \times B) \cup (B \times A)$, $(U \times A) \cap (U \times B)$; $(U \cap A) \times B$.

2. Vamos dar mais uma definição alternativa para um par ordenado. Defina $\langle a, b\rangle = \{\{a, b\}, \{b\}\}$. Mostre que esta também é uma definição boa para par ordenado, ou seja, que $\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle$ se e somente se $a = a'$ e $b = b'$.

3. Mostre que $((a, b), c) \neq (a,(b, c))$.

4. Seja $A = \{1, 2\}$, $B = \{4, 9\}$ e $C = \{4, 8\}$. Determine $A \times B \times C$.

5. Olhando para a nossa definição de um par ordenado (a, b) como $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, poderíamos tentar definir uma tripla ordenada (a, b, c) como $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$. Mostre através de um exemplo que essa não é uma definição boa. Ou seja, ache duas triplas ordenadas distintas que não seriam distintas nesta definição.

2. Relações

6. Seja R uma relação binária e A e B conjuntos. Mostre que:
(a) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$;
(b) $R[A \cap B] \subset R[A] \cap R[B]$;
(c) $R[A \setminus B] \supset R[A] \setminus R[B]$;
(d) $A \subset R^{-1}[R[A]]$ e $B \subset R[R^{-1}[B]]$ (supondo $A \subset DomR$ e $B \subset ImR$).

7. Em cada item abaixo, ache $Dom(R)$, $Im(R)$, R^{-1}, $R[X]$ e $R^{-1}[Y]$:
(a) R é a relação de $A = \{2, 3, 4, 5\}$ em $B = \{3, 6, 7, 10\}$ definida por xRy se e somente se "x divide y", $X = \{2, 5\}$ e $Y = \{7\}$;
(b) $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é dada por xRy se e só se "$y = x + 3$", $X = \{0, 1, \ldots, n\}$ para um $n \in \mathbb{N}$ fixo e $Y = 2\mathbb{N} = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ é par}\}$;
(c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \geq x^2\}$, $X =]-1, 1]$ e $Y =]-5, 5[$.

8. Se $R \subset U \times U$ é tal que $Dom(R) = U$ e $Im(R) = U$, então $R = U \times U$? Mostre ou dê um contra-exemplo.

9. Seja $R \subset X \times Y$. Mostre que:
(a) Se $a \notin Dom(R)$, então $R[\{a\}] = \emptyset$; se $b \notin Im(R)$, então $R^{-1}[\{b\}] = \emptyset$; $Dom(R) = Im(R^{-1})$ e $Im(R) = Dom(R^{-1})$; e que $(R^{-1})^{-1} = R$;
(b) $Dom(R) = Im(R^{-1})$;
(c) $(R^{-1})^{-1} = R$.

10. (a) Seja $A = \{3, 5, 8, 9\}$ e $B = \{1, 2, 8, 9\}$. Determine $R \circ R^{-1}$ e $R^{-1} \circ R$, sendo R a relação $x < y$ entre A e B.

(b) Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + 2y = 12\}$. Escreva explicitamente o conjunto R e determine $R \circ R^{-1}$ e $R^{-1} \circ R$.
(c) Sejam R e S as relações definidas por $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 4\}$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y = 3\}$. Determine $R \circ S$ e $S \circ R$.

11. (a) Se $R \subset A \times B$ e $S \subset B \times C$, mostre que $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.
(b) Sejam $U \subset A \times B$, $V \subset B \times C$ e $T \subset C \times D$. Mostre que $(T \circ V) \circ U = T \circ (V \circ U)$.

12. Seja $U = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(x, y) \in U \times U : y = x\}$ e $S = \{(x, y) \in U \times U : y < -x\}$. Determine $U^2 \setminus R$, $R \cup S$, $R \cap S$ e $U^2 \setminus (R \cap S)$.

13. Seja $X = \{1, \{1\}\}$ e $Y = \mathcal{P}(x)$. Descreva as relações $=_Y$ (identidade) e $\in_Y$ (pertinência) e depois ache o domínio e a imagem de cada uma delas.

3. Funções

14. Para cada f abaixo, se f é função, verifique se f é injetora e sobrejetora, e ache a inversa quando possível (quando f não é sobrejetora, defina a inversa considerando a imagem da f).
(a) $f = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = x^2\}$;
(b) $f = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y = 0\}$;
(c) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x - 1\}$;
(d) $f = \{(x, x^{\frac{1}{2}}) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$;
(e) $f = \{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$;
(f) $f = \{(x, \frac{1}{|x|}) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$;
(g) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^{\frac{1}{3}}\}$;
(h) $f = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x|y\}$.

15. Usando as funções acima ache $f[X]$ e $f^{-1}[Y]$ onde (em cada item use a função do item correspondente do exercício 1):
(a) X o conjuntos dos pares e Y o conjunto dos ímpares;
(b) $X = Y = \mathbb{N}$;
(c) $X = \mathbb{N}$ e $Y = \mathbb{Z}$;
(d) $X = Y = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$;
(e) $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ e $Y = \mathbb{R}$;
(f) $X = Y =]1, 2[$;
(g) $X = Y = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2\}$;

16. As funções f_1, f_2, f_3 e f_4 são definidas por: $f_1 = \{(x, 2x - 1) : x \in \mathbb{R}\}$, $f_2 = \{(x, x^{\frac{1}{2}}) : x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0\}$; $f_3 = \{(x, x^{\frac{1}{3}}) : x \in \mathbb{R}\}$ e $f_4 = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0\}$. Descreva cada uma das funções abaixo determinando, em cada caso, o domínio e a imagem: $f_2 \circ f_1$, $f_1 \circ f_2$, $f_3 \circ f_1$, $f_1 \circ f_3$, $f_4 \circ f_1$, $f_1 \circ f_4$, $f_2 \circ f_4$, $f_4 \circ f_2$ e $f_3 \circ f_4$.

17. Mostre que:
(a) Se f é uma função inversível, então $f^{-1} \circ f = Id_{dom(f)}$ e $f \circ f^{-1} = Id_{im(f)}$. (Aqui Id_A é a função identidade definida no conjunto A.)
(b) Seja f uma função e suponha que existam funções g e h tais que $g \circ f = Id_{dom(f)}$ e $f \circ h = Id_{im(f)}$. Então f é inversível e $f^{-1} = g = h$.

18. Mostre que se f e g são funções injetoras, então $g \circ f$ também é uma função injetora e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

19. Seja f uma função. Mostre que:
(a) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$;
(b) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$