RELAÇÕES

I. **Definições básicas:**

1. Sejam X e Y conjuntos. Uma *relação (binária)* entre X e Y é um conjunto $R \subset X \times Y$. Se $X = Y$, ou seja, se $R \subset X \times X$, dizemos que R é uma *relação em* X. Notação: É usual escrever xRy ao invés de $(x, y) \in R$.

2. Se R é uma relação entre X e Y, ou seja $R \subset X \times Y$, X e Y cojuntos, $A \subset X$ e $B \subset Y$, definimos:

(a) o *domínio* de R por $DomR = \{x \in X : \exists y \in Y \text{ tal que } xRy\}$;
(b) a *imagem* de R por $ImR = \{y \in Y : \exists x \in X \text{ tal que } xRy\}$;
(c) a *imagem de A por R* como sendo o conjunto $R[A] = \{y \in ImR : \exists x \in A \text{ tal que } xRy\}$;
(d) a *imagem inversa de B por R* como sendo o conjunto $R^{-1}[B] = \{x \in DomR : \exists y \in B \text{ tal que } xRy\}$.

3. Se R é uma relação entre X e Y, a *relação inversa* de R, denotada por R^{-1} é a relação entre Y e X definida por $R^{-1}\{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}$. Note que se $B \subset Y$, $R^{-1}[B] = (R^{-1})[B]$, não havendo assim ambiguidade na notação $R^{-1}[B]$.

4. Se R e S são relações onde $R \subset A \times B$ e $S \subset B \times C$, definimos a *relação composta* $T \subset A \times C$ por $T = S \circ R = \{(x, z) \in A \times C : \exists y \in B \text{ tal que } (x, y) \in Re(y, z) \in S\}$.

II. **Exercícios:**

1. Seja R uma relação binária e A e B conjuntos. Mostre que:

(a) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$;
(b) $R[A \cap B] \subset R[A] \cap R[B]$;
(c) $R[A \setminus B] \supset R[A] \setminus R[B]$;
(d) $A \subset R^{-1}[R[A]]$ e $B \subset R[R^{-1}[B]]$ (supondo $A \subset DomR$ e $B \subset ImR$).

2. Seja $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $Y = \mathcal{P}(X)$.

(a) Descreva $\in_Y$ e $=_Y$.
(b) Ache o domínio e a imagem de $\in_Y$ *e* $=_Y$.

(Lembrando: Para um conjunto X, $\in_X = \{(x, y) \in X \times X : x \in y\}$ e $=_X = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$.)

3. Seja $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m = n^2\}$. Ache $R[A]$ e $R^{-1}[B]$ onde $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{1, 4, 5\}$.

4. Sejam $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$.

(a) Ache $R[A]$ e $S[A]$, onde $A = [-2, 2]$.
(b) Ache $R^{-1}[B]$ e $S^{-1}[B]$ onde $B =]0, 1[$.
(c) Ache $R \cap S$, $R \cup S$, $\mathbb{R} \setminus R$, R^{-1}, S^{-1}, $R \circ S$, $S \circ R$, $R \setminus S$ e $S \setminus R$.