Universidade de São Paulo

Lista 2 - Física 1 (4310145)

Instruções

- A lista deve ser manuscrita!
- Para entregar sua lista, faça um upload para https://mega.nz/megadrop/6Blr5qcXTJM
- Não esqueça de colocar seu nome e número USP na lista!
- Não coloque apenas a resposta final! Apresente seus cálculos, faça diagramas, desenhos e explique, da melhor maneira possível, as etapas da resolução.
- Quando você digitalizar sua lista, coloque todos os exercícios em um mesmo arquivo (preferencialmente pdf) em ordem. Se você não sabe fazer isso, procure aprender com antecedência. Antes de enviar, certifique-se que a digitalização ficou legível. O nome do arquivo da sua lista deve ter a forma "primeiro nome-número USP-Lista-X", onde X é o número da lista. Por exemplo: "jader-12345678-Lista-3.pdf"
- Você pode e deve discutir a sua lista com seus colegas, mas não deve copiar a lista dos seu colegas.
- Se você tiver qualquer dúvida, entre em contato! ;)

1. Dois vetores tem módulos diferentes. A soma deles pode ser zero? Explique.
2. Considere os vetores $\vec{A} = 3,4\hat{\imath} + 4,7\hat{\jmath}$, $\vec{B} = (-7,7)\hat{\imath} + 3,2\hat{\jmath}$ e $\vec{C} = 5,4\hat{\imath} + (-9,1)\hat{\jmath}$.
   (a) Encontre o vetor $\vec{D}$, em notação de vetores unitários, tal que $\vec{D} + 2\vec{A} - 3\vec{C} + 4\vec{B} = 0$.
   (b) Expresse a resposta obtida em (a) em termos da magnitude e angulo com o sentido $+x$.
   (c) Calcule o vetor unitário (em termos de $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$) com a orientação oposta à orientação de cada um dos vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$
3. Considere um vetor dado por $\vec{r} = 2,00\hat{\imath} + 1,00\hat{\jmath} + 3,00\hat{k}$. Encontre
   (a) a magnitude de $\vec{r}$
   (b) o angulo entre $\vec{r}$ e os eixos x, y e z
4. Sendo que $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ mostre que[1]

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \tag{1}$$

   em que θ é o ângulo entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$. A relação (1) é chamada de Lei dos Cossenos.
5. Calcule o ângulo θ entre os vetores $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ e $\vec{B} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$.
6. Dado um vetor $\vec{r}$ no espaço tridimensional, podemos calcular suas componentes como (ver Figura 1(a))

$$r_x = r\sin\theta\cos\phi \tag{2}$$
$$r_y = r\sin\theta\sin\phi \tag{3}$$
$$r_z = r\cos\theta \tag{4}$$

[1] Lembre-se que o módulo de um vetor qualquer $\vec{r}$ pode ser representado como $r = |\vec{r}\,|$.

Sabemos que o vetor $\vec{r}$ é completamente caracterizado pelas suas componentes r_x, r_y e r_z. Porém, o vetor $\vec{r}$ também é completamente caracterizado pelas quantidades r, θ e ϕ. Essas são as chamadas coordenadas esféricas.

(a) Mostre que $r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2$

(b) Escreva as coordenadas esféricas r, θ e ϕ em função das coordenadas cartesianas r_x, r_y e r_z.

(c) As coordenadas r_x, r_y e r_z também podem ser escritas como (ver Figura 1(b))

$$r_x = r\cos\alpha \tag{5}$$

$$r_y = r\cos\beta \tag{6}$$

$$r_z = r\cos\theta \tag{7}$$

em que (α, β, θ) são os ângulos que o vetor $\vec{r}$ faz com os eixo x, y e z. Mostre que:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1$$

As quantidades $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\theta$ são chamados de cossenos diretores do vetor.

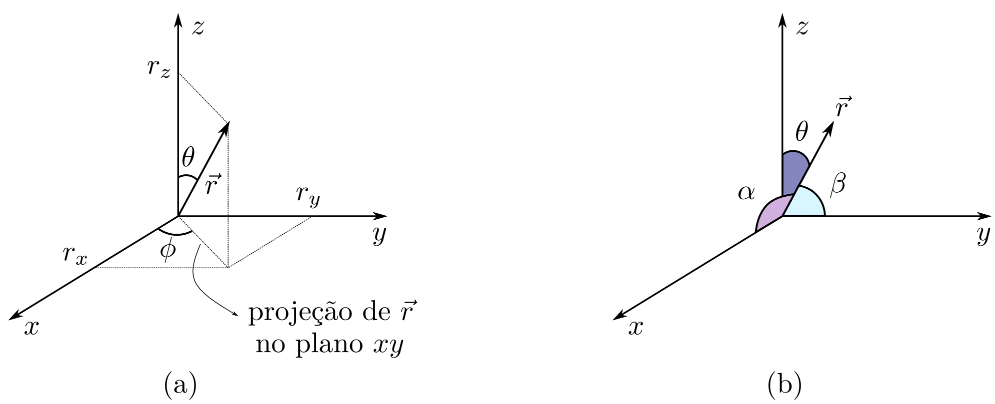

Figura 1: (a) Projeção do vetor $\vec{r}$ nos eixos cartesianos. O vetor $\vec{r}$ é completamente caracterizado pelas coordenadas r, θ e ϕ. (b) Ângulos diretores.

7. O produto vetorial entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ resulta em um novo vetor $\vec{C}$, que pode ser escrito como $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. A direção do vetor $\vec{C}$ é perpendicular ao plano formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, seu sentido pode ser encontrado pela regra da mão direita e seu módulo é dado por $C = AB\sin\theta$ onde θ é o menor angulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

   (a) Mostre que o módulo de $\vec{C}$ é igual à área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ (ver Figura 2)

   (b) Calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k} \qquad \vec{B} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k} \tag{8}$$

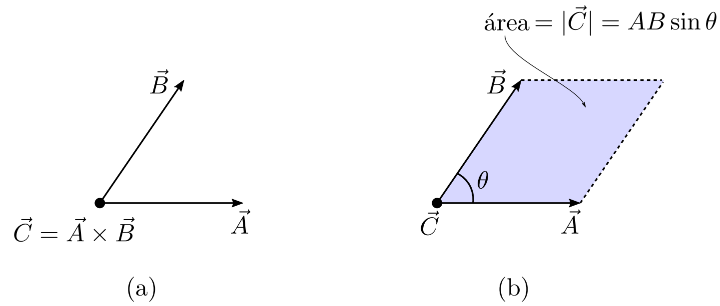

Figura 2: Problema 7. (a) Vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ com suas origens superpostas. Estamos supondo que os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão no plano da pagina, desta forma, sabemos que o vetor $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ é perpendicular ao plano da página e aponta no sentido para fora da página. Neste caso, o vetor $\vec{C}$ é representado como um ponto (o vetor $-\vec{C}$ seria representado como $\otimes$) . (b) o módulo de $\vec{C}$ é igual à área do paralelogramo.

8. Dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ tem mesma magnitude. Para que a magnitude de $\vec{A} + \vec{B}$ seja 100 vezes maior que a magnitude de $\vec{A} - \vec{B}$, qual deve ser o angulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$?

9. Chama-se vetor unitário (ou versor) um vetor de módulo igual a 1. Costuma-se designar um vetor unitário na direção de $\vec{a}$ por $\hat{a}$. O vetor $\hat{a}$ pode ser escrito como

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a} \tag{9}$$

em que $a = |\vec{a}|$. Vetores unitários que apontam nos sentidos positivos x, y e z são convenientes para expressar vetores em termos de suas componentes retangulares. Estes vetores unitários são usualmente escritos como $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, respectivamente[2]. Por exemplo, o vetor $a_x\hat{\imath}$ tem magnitude $|a_x|$ e aponta no sentido de $+x$ se a_x é positivo (ou no sentido $-x$ se a_x é negativo).

   (a) Dado o vetor $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ encontre o vetor unitário que aponta na direção do vetor $\vec{a}$, ou seja, encontre $\hat{a}$.

10. Um sistema de coordenadas cartesianas retangulares no espaço tridimensional é caracterizado por um conjunto de três retas (os eixos x, y e z) denominadas de eixos coordenados, mutuamente perpendiculares, as quais se interceptam em um único ponto, denominado de origem. Conforme a posição da direção positiva dos eixos, um sistema de coordenadas cartesianas pode ser dextrogiro ou levogiro. Para verificar se um sistema de coordenadas xyz é um sistema dextrogiro, basta aplicar a regra da mão direita ao produto vetorial $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$ no sistema dado. Se os dedos empurrarem $\hat{i}$ (semieixo x positivo) na direção de $\hat{\jmath}$ (semieixo y positivo) e o polegar estendido apontar no sentido do semieixo z positivo, o sistema é dextrogiro; caso contrário o sistema é levogiro. Em geral, os sistemas de coordenados usados nos cursos de física são todos dextrogiro.

    (a) Qual dos sistemas de eixos da Figura 3 são "sistemas de coordenadas dextrogiros"?

[2] Outras notações para os vetores unitários que apontam nos sentidos positivos x, y e z também são usadas. Por exemplo, $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$, ou ainda, $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ e $\hat{u}_z$.

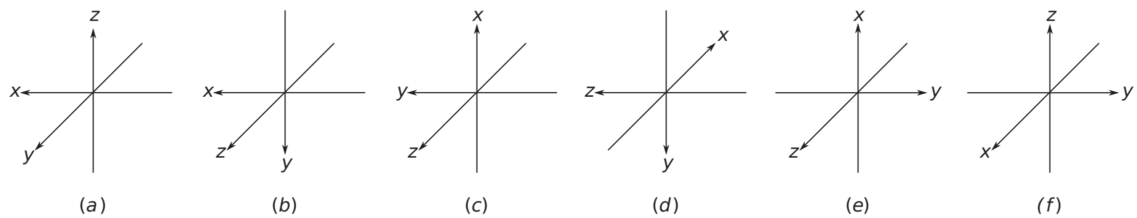

Figura 3: Sistemas de coordenadas.

11. Não basta que uma grandeza física seja caracterizada por sua magnitude, direção e sentido para que ela tenha caráter vetorial. É preciso ainda que ela obedeça às leis de composição, como por exemplo,

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_2 + \vec{r}_1$$

Suponha que alguém queira associar um vetor $\vec{\theta}$ a uma rotação em torno de um eixo. Poderíamos tomar $\vec{\theta}$ na direção do eixo de rotação e de magnitude dada pelo ângulo de rotação θ. O sentido de $\vec{\theta}$ poderia ser associado ao sentido de rotação, convencionando-se que a rotação, vista a partir da "extremidade da seta" de $\vec{\theta}$, é no sentido anti-horário (Figura 4(b))

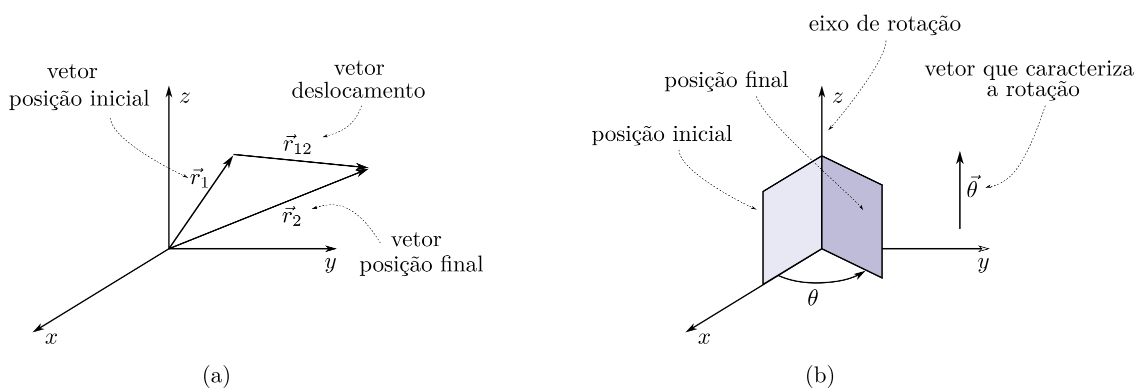

Figura 4: (a) Como definimos o vetor deslocamento $\vec{r}_{12}$, ou seja, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. (b) Tentando definir um vetor deslocamento angular $\vec{\theta}$.

Entretanto, embora $\vec{\theta}$ tenha magnitude (módulo) direção e sentido, ele NÂO É UM VETOR! Isto acontece porque a operação de soma deixa de satisfazer à propriedade comutativa, ou seja,

$$\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 \neq \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$$

Para demonstrar o resultado acima, vamos considerar $\vec{\theta}_1$ como sendo uma rotação de $+90°$ em torno do eixo $+x$ e $\vec{\theta}_2$ como sendo uma rotação de $+90°$ em torno do eixo $+y$. A Figura 5(a) mostra a posição inicial de um objeto (livro).

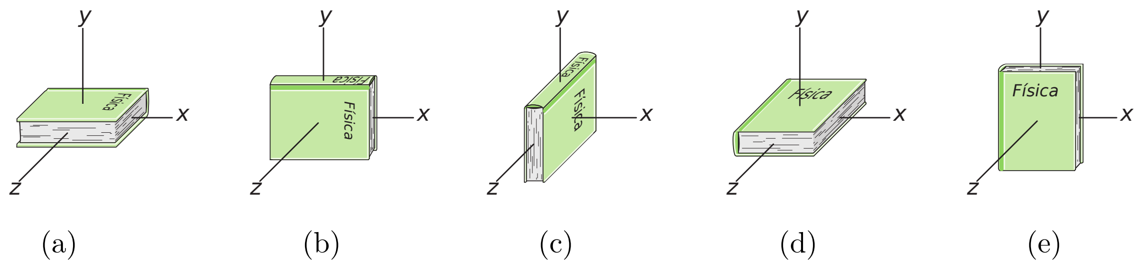

Figura 5: Não comutatividade da resultante de rotações finitas.

(a) Qual dos casos na Figura 5 representa o efeito de aplicar $\vec{\theta}_1$?

(b) Qual dos casos na Figura 5 representa o efeito de aplicar $\vec{\theta}_2$?

(c) Qual dos casos na Figura 5 representa o efeito de aplicar $\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2$? (Aqui $\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2$ significa primeiro aplicarmos $\vec{\theta}_1$ e sequencialmente aplicarmos $\vec{\theta}_2$)

(d) Qual dos casos na Figura 5 representa o efeito de aplicar $\vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$? (Aqui $\vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$ significa primeiro aplicarmos $\vec{\theta}_2$ e sequencialmente aplicarmos $\vec{\theta}_1$)

(e) A soma de dois deslocamentos angulares (rotações) depende da ordem, ou seja, $\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2$ é igual a $\vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$?

A ideia deste exercício foi mostrar que a soma de dois deslocamentos angulares depende da ordem desses deslocamentos e, portanto, as rotações finitas em torno de eixos diferentes NÃO SÃO VETORES!

12. O ponteiro dos minutos de um relógio de parede tem um comprimento de $0,5$m e o ponteiro das horas tem o comprimento de $0,25$m. Tome o centro do relógio como origem e use um sistema de coordenadas cartesianas com o eixo $+x$ apontando para as 3h e o eixo $+y$ apontando para 12h. Usando vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, expresse os vetores posição da ponta do ponteiro das horas ($\vec{A}$) e da ponta do ponteiro dos minutos ($\vec{B}$) quando o relógio marca

    (a) 12:00

    (b) 3:00

    (c) 6:00

    (d) 9:00

13. Se desprezarmos os efeitos da resistência do ar, os alcances de projéteis (no mesmo nível) cujos ângulos de projeção diferem de 45°, para mais e para menos, do mesmo valor, são iguais (como mostrado na Figura 6). Prove esse resultado. [Dica: $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$]

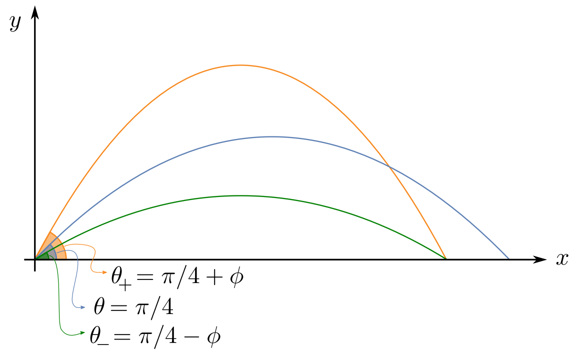

Figura 6: Alcance de um projétil. Os ângulos mostrados, são os ângulos de lançamento. Angulos que diferem de 45°, para mais ou para menos, do mesmo valor, resultam no mesmo alcance, como acontece com o alcance das trajetórias laranja e verde.

14. Considere o lançamento de um projétil tal que seu alcance é 4 vezes sua altura máxima, e tal que ele permanece no ar durante 2s.
    (a) Em que angulo ele foi lançado?
    (b) Qual foi sua velocidade inicial?
    (c) Qual é o alcance?
15. Um corpo cai de um balão que se desloca horizontalmente. O corpo permanece no ar durante 3s e atinge o solo segundo uma direção que faz um ângulo de 30° com a vertical.
    (a) Qual é a velocidade do balão?
    (b) De que altura a o corpo caiu?
    (c) Que distância o corpo percorreu na horizontal?
    (d) Com que velocidade o corpo atinge o solo?
16. O vetor posição $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ de uma partícula P no plano x, y fica completamente caracterizada pelo módulo do vetor $\vec{r}$, dado por
    $$|\vec{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
    e pelo angulo θ que ele faz com o eixo x positivo (r e θ são chamados de coordenadas polares). Podemos definir dois vetores unitários $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$, como mostrado na Figura 7(a). Note que o vetor unitário $\hat{r}$ pode ser definido da maneira usual, ou seja, $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ em que $r = |\vec{r}|$. Já o vetor unitário $\hat{\theta}$ tem direção perpendicular ao vetor $\vec{r}$ e sentido como mostrado na Figura 7. Note que, ao contrário dos vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, que não variam com o vetor $\vec{r}$, os vetores unitários $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ dependem do vetor $\vec{r}$.

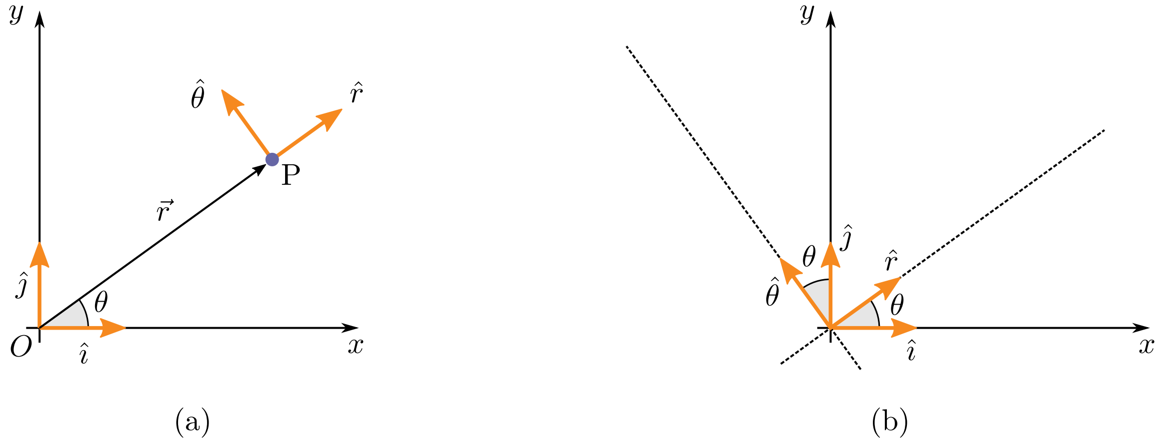

Figura 7: (a) Partícula P e seu vetor posição $\vec{r}$. Também são mostrados os vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ e os vetores unitários $\hat{\theta}$ e $\hat{r}$. (b) Nessa figura podemos entender melhor como escrever os vetores $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ em função dos vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$. Note que os vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$ não mudam de direção dependendo da posição da partícula, já a direção dos vetores unitários $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ dependem da posição da partícula (indicada pelo ponto P na Figura).

(a) Expresse os vetores unitários $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ em termos dos vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$.

(b) Mostre que

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{10}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} \tag{11}$$

(c) Estude o Apêndice A.

17. Uma pessoa está em um carrossel que descreve um movimento circular uniforme. No instante $t_1 = 2,00$s, a velocidade da pessoa é $\vec{v}_1 = (3,00\text{m/s})\hat{i} + (4,00\text{m/s})\hat{\jmath}$, medida em um sistema de coordenadas cartesianas xy. No instante $t_2 = 5,00$s, a velocidade da pessoa é $\vec{v}_2 = (-3,00\text{m/s})\hat{\imath} + (-4,00\text{m/s})\hat{\jmath}$.

(a) Em qual quadrante a pessoa se encontra nos instantes t_1 e t_2?

(b) Qual é o raio da circunferência transcrita pela pessoa?

(c) Qual é o módulo da aceleração centrípeta da pessoa?

(d) Qual é a aceleração média da pessoa no intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$?

(e) Encontre o vetor posição da pessoa para os instantes t_1 e t_2.

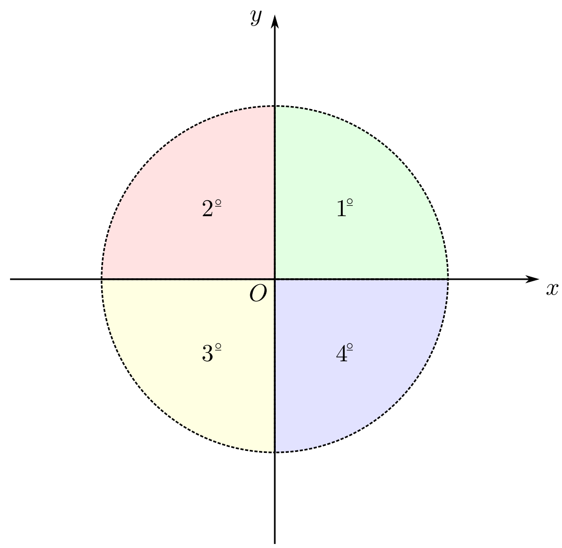

Figura 8: Pessoa no carrossel. Em qual quadrante a pessoa se encontra nos instantes t_1 e t_2?

18. Dois carros, A e B, percorrem vias paralelas a 70km/h e 90km/h, respectivamente. Calcule a velocidade de B relativa a A, quando
    (a) eles se movem no mesmo sentido
    (b) eles se movem em sentidos contrários
19. A posição de uma partícula P com relação a um referencial A é dada, em metros, por $\vec{r}_{PA} = (6t^2 - 4t)\hat{\imath} + (-3t^2)\hat{\jmath} + 3\hat{k}$.
    (a) Determine a velocidade de um referencial B com relação a um referencial A, dado que a posição da partícula P relativa ao sistema B é $\vec{r}_{PB} = (6t^2 + 3t)\hat{\imath} + (-3t^2)\hat{\jmath} + 3\hat{k}$.
    (b) Mostre que a aceleração da partícula é a mesma em ambos os sistemas.
20. Uma pessoas faz uma pedra descrever uma circunferência horizontal com $1,5$m de raio e $2,0$m acima do chão. A corda arrebenta e a pedra é arremessada horizontalmente, chegando ao solo depois de percorrer uma distância horizontal de 10m. Qual era o módulo da aceleração centrípeta da pedra durante o movimento circular?

Apêndice

A O caso especial do movimento circular uniforme

As equações que encontramos no Exercício 16, isto é,

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{12}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} \tag{13}$$

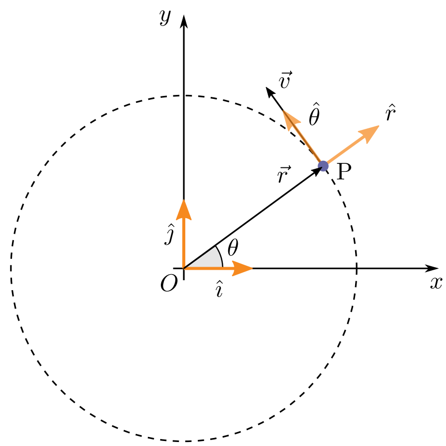

Figura 9: Movimento circular uniforme.

são gerais. Valem para qualquer tipo de movimento em duas dimensões. Em particular podemos aplica-las para o caso do *movimento circular uniforme* (MCU). Note que no caso de um MCU, r não muda com o tempo (é o raio da trajetória), portanto $\dot{r} = 0$, e a taxa de variação do ângulo θ com relação ao tempo (ou seja $\dot{\theta}$) é constante. Essa quantidade é chamada de velocidade angular

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{(velocidade angular)} \tag{14}$$

Neste caso, podemos reescrever a velocidade $\vec{v}$ (dada pela Eq. (12)) como

$$\vec{v} = r\omega\hat{\theta} \tag{15}$$

Medimos a velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$ em rad/s, ou simplesmente em s^{-1}. Por exemplo, a velocidade angular do ponteiro dos segundos é $\omega = (2\pi/60)\mathrm{s}^{-1}$, ou seja, uma volta completa (2π) a cada 60 segundos. Se chamarmos o período do movimento de T (período do movimento é o tempo para dar uma volta completa), podemos escrever a velocidade angular como

$$\omega = 2\pi/T \qquad \text{(velocidade angular para MCU)} \tag{16}$$

Usando a expressão, valida para o MCU, $T = 2\pi r/v$, podemos escrever

$$\omega = v/r \tag{17}$$

Dessa forma podemos reescrever Eq. (15) como

$$\vec{v} = v\hat{\theta} \tag{18}$$

Ou seja, para um MCU, a velocidade só tem uma componente, de módulo $|\vec{v}| = v$ na direção tangencial a circunferência e não possui nenhuma componente na direção radial (direção do vetor unitário $\hat{r}$). Note ainda que podemos substituir a expressão para $\hat{\theta}$ (escrita em função dos vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$) para escrever

$$\vec{v} = v\hat{\theta} = v\big(-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}\big) = -v\sin\theta\hat{\imath} + v\cos\theta\hat{\jmath} \tag{19}$$

Podemos fazer o mesmo tipo de analise para a aceleração $\vec{a}$. Neste caso, para o MCU, $\ddot{r} = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$ (pois como a velocidade angular é constante ($\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$) sua derivada (que é a aceleração angular) é zero). Assim, podemos reescrever a Eq. (13) como

$$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r} \tag{20}$$

Além disso, usando Eq. (17), podemos escrever

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{r} \tag{21}$$

Portanto, no caso de um MCU, o vetor aceleração tem somente componente radial e aponta no sentido contrário ao de $\hat{r}$, ou seja, aponta no sentido do centro da trajetória. Além disso, podemos substituir o vetor $\hat{r}$ escrito em função dos vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, para escrever

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{r} = -\frac{v^2}{r}\big(\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}\big) \tag{22}$$

Aceleração centrípeta e tangencial

Podemos também estudar um movimento não-uniforme sobre uma trajetória circular. Neste caso, além da direção do vetor velocidade mudar, seu módulo também vai variar com o tempo. Vamos voltar a relação geral para aceleração:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

No caso de um movimento circular não uniforme, temos que: r é constante, $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$, entretanto, a velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$ não é constante, e portanto $\ddot{\theta}$ não é zero. Ficamos com

$$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r} + r\dot{\omega}\hat{\theta} \tag{23}$$

Se definirmos

$$a_r = -r\omega^2 = -\frac{v^2}{r} \tag{24}$$

$$a_\theta = \dot{\omega}r = \alpha r \tag{25}$$

onde $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ é a aceleração angular, podemos reescrever Eq. (23) como

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} \tag{26}$$

A Eq. (26) nos mostra que no caso de um movimento circular não-uniforme o vetor aceleração tem duas componentes. Uma delas continua sendo a aceleração centrípeta $a_r\hat{r}$, o outro termo, $a_\theta\hat{\theta}$ é a aceleração tangente ao círculo, e se chama por isso de aceleração tangencial. Alguns livros também costumam chamar a aceleração tangencial como a_t ao invés de a_θ.