

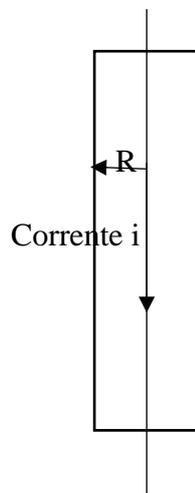
**PQI 5776 – Fenômenos de Transporte I**

**AULA -03**

EXEMPLO 2.8-1 DEEN– 1ªed / página 48

Transmissão de calor num fio.

Considere um fio em cilíndrico de raio  $R$  que é aquecido pela passagem de uma corrente elétrica e resfriado por transferência de calor por convecção para o ar circundante. A temperatura está em regime permanente no fio. A taxa de produção de calor local é  $Hv$  é considerada independente da posição isto significa considerar que tanto a densidade de corrente elétrica quanto a resistência elétrica são uniformes. Deseja-se determinar o perfil de temperatura no fio.



Em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{Hv}{\rho \overline{C_p}} \quad (\text{eq 1})$$

Simplificações:

$$v_r = v_\theta = v_z = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (\text{regime permanente})$$

A transferência de calor por difusão só ocorre na direção radial.

Os coeficientes  $h$  (coeficiente de transferência de calor) e  $k$  (condutibilidade térmica) são consideradas constantes e independentes de temperatura.

Assim, a equação fica como:

$$\alpha \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + \frac{Hv}{\rho \overline{C_p}} = 0 \quad (\text{eq 2})$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho \hat{C}_p} \quad (\text{eq 3})$$

Assim:

$$\frac{k}{\rho \hat{C}_p} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + \frac{Hv}{\rho \hat{C}_p} = 0 \quad (\text{eq 4})$$

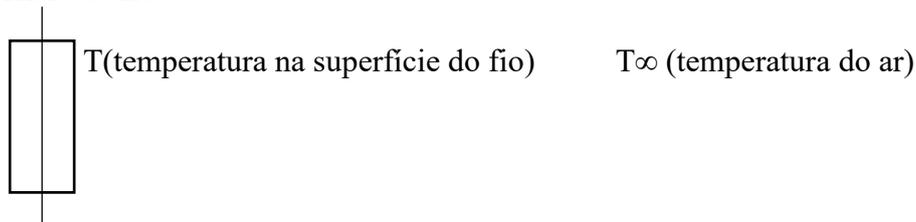
E:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{Hv}{k} \quad (\text{eq 5})$$

Como a temperatura só é função do raio, a derivada parcial torna-se a derivada ordinária.

Estabelecendo as condições de contorno:

a) na superfície do fio:



Pela lei de Fourier:

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad (\text{eq 6})$$

No contato do fio com o ar:

$$q = h(T - T_{\infty}) \quad (\text{eq 7})$$

Igualando-se as eq 6 e 7:

Condição de contorno 1:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{h}{k} (T - T_{\infty}) \quad (\text{eq 8}), \text{ para } r = R$$

No centro do fio, tem-se a condição de simetria:

Condição de contorno 2:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = 0 \quad (\text{eq 9})$$

Da eq 5:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{H_v}{k} r \quad (\text{eq 10})$$

Que fornece na primeira integração:

$$\left( r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{H_v}{2k} r^2 + C_1 \quad (\text{eq 11})$$

Com a condição de contorno 2, obtém-se o valor da constante  $C_1=0$

Assim:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{H_v r}{2k} \quad (\text{eq 12})$$

Que por integração fornece:

$$T = -\frac{H_v}{4k} r^2 + C_2 \quad (\text{eq 13})$$

Para se determinar a constante  $C_2$ , utiliza-se a condição de contorno 2:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{h}{k} (T - T_\infty) \quad , r = R$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{H_v r}{2k}$$

$$-\frac{H_v r}{2k} = -\frac{h}{k} \left[ -\frac{H_v}{4k} r^2 + C_2 - T_\infty \right] \quad (\text{eq 14})$$

De onde se obtém:

$$C_2 = T_\infty + \frac{H_v R^2}{4k} + \frac{H_v R}{2h}$$

E o perfil será:

$$T - T_\infty = \frac{H_v R^2}{4k} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] + \frac{H_v R}{2h} \quad (\text{eq 15})$$

Análise do perfil:

-para  $r = R$  (na superfície do fio):

$$T - T_{\infty} = \frac{H_v R}{2h} \quad (\text{eq 16})$$

Ou:

$$T = T_{\infty} + \frac{H_v R}{2h} \quad (\text{eq 17})$$

A temperatura na superfície do fio, supera a temperatura do ar circundante em  $\frac{H_v R}{2h}$ .

-para  $r = 0$  (no centro do fio):

$$T - T_{\infty} = \frac{H_v R^2}{4k} + \frac{H_v R}{2h} \quad (\text{eq 18})$$

Ou

$$T = T_{\infty} + \frac{H_v R^2}{4k} + \frac{H_v R}{2h} \quad (\text{eq 19})$$

A temperatura no centro do fio, supera a temperatura na superfície do fio ( $T_{\infty} + \frac{H_v R}{2h}$ ) por um fator igual a  $\frac{H_v R^2}{4k}$ .

Usando-se adimensionais:

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_c - T_{\infty}} \quad (\text{eq 20})$$

em que:

$$T_c = T(0) = T_{\infty} + \frac{H_v R^2}{4k} + \frac{H_v R}{2h} \quad (\text{eq 19})$$

Ou

$$T_c - T_{\infty} = \frac{H_v R^2}{4k} + \frac{H_v R}{2h} \quad (\text{eq 21})$$

$$\eta = \frac{r}{R} \quad (\text{eq 22})$$

$$Bi = \frac{hR}{k} \quad (\text{número de Biot}) \quad (\text{eq 23})$$

Que expressa (convecção)/(condução).

Do perfil de temperatura (eq 15):

$$T - T_{\infty} = \frac{H_v R^2}{4k} + \frac{H_v R^2}{4k} \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{H_v R}{2h} \quad (\text{eq 24})$$

Da eq 21:

$$T - T_{\infty} = T_c - T_{\infty} + \frac{H_v R^2}{4k} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (\text{eq 25})$$

Que dividindo-se por:

$$T_c - T_{\infty} \text{ e } \frac{H_v R^2}{4k} + \frac{H_v R}{2h}$$

que são iguais, obtém-se:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_c - T_{\infty}} = 1 - \frac{\frac{H_v R^2}{4k} \left(\frac{r}{R}\right)^2}{\frac{H_v R^2}{4k} + \frac{H_v R}{2h}} \quad (\text{eq 26})$$

Que simplificada e utilizando-se os adimensionais definidos fornece:

$$\theta = \frac{2 + \text{Bi}(1 - \eta^2)}{2 + \text{Bi}} \quad (\text{eq 27})$$

Análise:

-se  $\text{Bi} \rightarrow 0$ ,  $\theta=1$

Sem convecção e só há a condução.

-se  $\text{Bi}$  é muito pequeno, predomínio da condução; a temperatura varia praticamente apenas na superfície do fio.

-se  $\text{Bi}$  é muito alto, há predomínio da convecção:

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_c - T_{\infty}} \rightarrow 0$$

E

$$T \rightarrow T_{\infty}$$

-para  $\text{Bi} \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\text{Bi} \rightarrow \infty} \theta = \lim_{\text{Bi} \rightarrow \infty} \frac{2 + \text{Bi}(1 - \eta^2)}{2 + \text{Bi}} = 1 - \eta^2$$

Que é um valor entre 0 e 1.

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_c - T_{\infty}} \rightarrow 1 - \eta^2$$

$T - T_{\infty}$  tem que ser pequeno e, portanto,  $T \rightarrow T_{\infty}$ .

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_c - T_{\infty}}$$

$$-r=0 (\eta = 0) \rightarrow \theta=1$$

$$-r=R (\eta = 1) \rightarrow \theta=0$$

Ver figura 2-5; Deen; página 50.

EXEMPLO 2.8-2: DEEN – 1ªed, pagina 50.

Difusão num gás com dois componentes A e B e com reação heterogênea. Este exemplo ilustra o uso da Lei de Fick para um gás com dois componentes e também mostra como a produção por uma reação influencia a condição de contorno numa superfície catalítica. Sistema a ser considerado: filme estagnado com espessura L está em contato com uma superfície de catalisador que promove a reação irreversível  $A \rightarrow mB$ . A reação tem uma cinética de n-ésima ordem ( $n > 0$ ).

$$R_{SA} = -k_{Sn} C_A^n$$

$k_{Sn}$  é constante. Considere-se que a concentração molar de A,  $C_A$ , depende apenas de  $y$  e seu valor em  $y=0$  é  $C_{A0}$ . Considere-se que o gás é isotérmico e isobárico e, assim, a concentração molar total –  $C$  – é constante. A menos que as massas molares de A e B sejam idênticas, isto é, a menos que  $m=1$ , a massa específica,  $\rho$ , não é constante nessas condições. Deseja-se determinar o perfil de concentração.

$$y=0 \text{ ----- } C_A=C_{A0}$$

$$y=L \text{ ████████████████████ } A \rightarrow mB$$

Da equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{eq 1})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{eq 2})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Sistema isotérmico e isobárico,  $\rho$  só varia com  $y$ .

$v_x=v_z=0$ : o gás está estagnado e só há movimento na direção  $y$ .

Portanto:

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0 \quad (\text{eq 3})$$

Ou

$$\frac{d(\rho v_y)}{dy} = 0 \quad (\text{eq 4})$$

Isto significa que  $\rho v_y$  independe de  $y$ .

Considerando-se a superfície catalisadora impermeável:

$$-v_y \neq 0$$

-em  $y=L$ ,  $v_y=0$ . E  $\rho v_y = 0$  em  $y=L$ .

-como  $\rho v_y$  independe de  $y$  e é constante, para qualquer  $y$ ,  $v_y=0$ .

O fluxo total de massa é dado por  $\rho \vec{v}$  em que  $\vec{v}$  é a velocidade mássica média.

$$\vec{N}_i = C_i \vec{v} + \vec{J}_i \quad (\text{eq 5})$$

$\vec{N}_i$  é o fluxo molar de  $i$

$C_i$  é a concentração molar de  $i$

$\vec{v}$  é a velocidade mássica

$\vec{J}_i$  é o fluxo molar de  $i$  relativo à velocidade mássica média

Como só há movimento na direção  $y$  e  $v_y=0$  em  $y=L$ , a velocidade mássica média é nula para as duas espécies e:

$$\vec{N}_{iy} = \vec{J}_{iy} \quad (\text{eq 6})$$

Da equação para a conservação das espécies:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\text{div} \vec{N}_i + R_{vi} \quad (\text{eq 7})$$

$R_{vi}$  é o termo de produção para uma reação homogênea

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial N_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial N_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{iz}}{\partial z} \right] + R_{vi} \quad (\text{eq 8})$$

Simplificando:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = 0 \quad (\text{regime permanente})$$

Fluxo só na direção  $y$ :

$$\frac{\partial N_{ix}}{\partial x} = \frac{\partial N_{iz}}{\partial z} = 0$$

Reação heterogênea:  $R_{vi} = 0$

Assim:

$$\frac{dN_{Ay}}{dy} = 0$$

e

$$\frac{dN_{By}}{dy} = 0$$

Os fluxos de  $N_{Ay}$  e  $N_{By}$  independem de  $y$  e, assim, ao se avaliar  $N_{iy}$  para qualquer  $y$ , tem-se  $N_{iy}$  para qualquer  $y$ .

Como  $A \rightarrow mB$

$$N_{By} = -mN_{Ay}$$

Considerando-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} N_A &= C_i \vec{V}^{(M)} + \vec{J}_A^{(M)} \\ C_i &= x_i C \\ C \vec{V}^{(M)} &= \sum_i N_i \\ \vec{J}_A^{(M)} &= -CD_{AB} \text{grad} x_A \end{aligned}$$

Chega-se a:

$$N_{Ay} = x_A (N_{Ay} + N_{By}) - CD_{AB} \frac{dx_A}{dy} \quad (\text{eq 9})$$

Como  $N_{By} = -mN_{Ay}$ :

$$N_{Ay} = x_A (N_{Ay} - mN_{Ay}) - CD_{AB} \frac{dx_A}{dy} \quad (\text{eq 10})$$

Ou

$$N_{Ay} = x_A N_{Ay} (1 - m) - CD_{AB} \frac{dx_A}{dy} \quad (\text{eq 11})$$

$x_A N_{Ay} (1 - m)$  = termo convectivo

$-CD_{AB} \frac{dx_A}{dy}$  = termo difusivo

O fluxo convectivo de A é:

$$C_A \vec{V}_y^{(M)}$$

E

$$C_A \vec{V}_y^{(M)} = C x_A \vec{V}_y^{(M)} = x_A N_{Ay} (1 - m)$$

E

$$\vec{V}_y^{(M)} = \frac{N_{Ay} (1 - m)}{C} \quad (\text{eq 12})$$

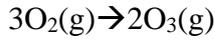
Que é a velocidade molar.

A velocidade molar média só é nula se  $m=1$ , apesar de a velocidade mássica média ser nula para qualquer estequiometria.

Em base molar há um fluxo convectivo.

Em base mássica não há um fluxo convectivo.

Exemplo:



96g.....96g

3mols.....2mols

Retomando-se a equação de fluxo:

$$N_{Ay} = x_A N_{Ay} (1 - m) - CD_{AB} \frac{dx_A}{dy} \quad (\text{eq 11})$$

Obtém-se:

$$N_{Ay} = - \frac{CD_{AB}}{1 - x_A(1 - m)} \frac{dx_A}{dy} \quad (\text{eq 13})$$

Como C é tido como constante:

$$N_{Ay} = - \frac{D_{AB}}{1 - \frac{C_A}{C}(1 - m)} \frac{d(Cx_A)}{dy} = - \frac{D_{AB}}{1 - \frac{C_A}{C}(1 - m)} \frac{d(C_A)}{dy} \quad (\text{eq 14})$$

O fluxo de A na superfície catalítica é dado por:

$$J_{AL} = -R_{SA} \quad (\text{eq 15})$$

Como:

$$N_{Ay} = J_{Ay}$$

$$N_{Ay}(L) = -R_{SA} = k_{Sn}[C_A(L)]^n \quad (\text{eq 16})$$

Como  $N_{Ay}$  independe de y ( $\frac{dN_{Ay}}{dy} = 0$ ):

$$- \frac{D_{AB}}{1 - \frac{C_A}{C}(1 - m)} \frac{d(C_A)}{dy} = k_{Sn}[C_A(L)]^n \quad (\text{eq 17})$$

Expressando-se  $d(C_A)/dy$ :

$$\frac{dC_A}{dy} = - \left( \frac{k_{Sn}}{D_{AB}} \right) C_A^n(L) \left[ 1 - \frac{C_A}{C}(1 - m) \right] \quad (\text{eq 18})$$

Usando-se adimensionais:

$$\theta = \frac{C_A}{C_{Ao}}$$

$$\eta = \frac{y}{L}$$

$$Da = \frac{k_{Sn} C_{Ao}^{(n-1)} L}{D_{AB}} \quad (\text{número de Damkoler})$$

$$\phi = \frac{C_A}{C_{Ao}} \quad \text{para } y = L$$

Dividindo-se por  $C_{Ao}^n$ :

$$\frac{d(C_A/C_{Ao})}{dy} \frac{1}{C_{Ao}^{(n-1)}} = -\frac{k_{Sn}}{D_{AB}} \frac{C_A^n(L)}{C_{Ao}^n} \left[ 1 - \frac{C_A}{C} (1-m) \right] \quad (\text{eq 19})$$

Ou

$$\frac{d\theta}{dy} = -\frac{k_{Sn}}{D_{AB}} C_{Ao}^{(n-1)} \phi^n \left[ 1 - \frac{C_A}{C} (1-m) \right] \quad (\text{eq 20})$$

Multiplicando-se por L:

$$L \frac{d\theta}{dy} = -\frac{k_{Sn}}{D_{AB}} C_{Ao}^{(n-1)} L \phi^n \left[ 1 - \frac{C_A}{C} (1-m) \right]$$

$$\frac{d\theta}{d(\eta/L)} = -Da \phi^n \left[ 1 - \frac{C_A}{C} \frac{C_{Ao}}{C_{Ao}} (1-m) \right]$$

$$\frac{d\theta}{d\eta} = -Da \phi^n [1 - x_A \theta (1-m)] \quad (\text{eq 21})$$

Que integrando-se:

$$\int_1^\phi \frac{d\theta}{1 - x_{Ao}(1-m)\theta} = \int_0^1 -Da \phi^n d\eta$$

Que fornece:

$$\frac{1}{x_{Ao}(1-m)} \ln \left[ \frac{1 - x_{Ao}(1-m)\phi}{1 - x_{Ao}(1-m)} \right] = Da \phi^n, \text{ para } m \neq 1 \quad (\text{eq 22})$$

Se  $m=1$ :

$$\frac{d\theta}{d\eta} = -Da \phi^n \quad (\text{eq 23})$$

$$\int_1^\phi d\theta = -Da \phi^n \int_0^1 d\eta$$

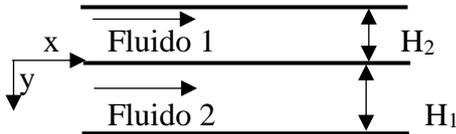
Que fornece:

$$Da \phi^n = 1 - \phi \quad (\text{eq 24})$$

Ver perfil, figura 2-7; Deen, página 53.

## EXEMPLO 6.2-3/ DEEN – 1ªed ,PÁGINA 256.

Escoamento de dois fluidos imiscíveis em canal de placas paralelas. Um tipo simples de escoamento bifásico ocorre quando dois fluidos imiscíveis ocupam camadas distintas entre duas placas paralelas. A densidade ( $\rho_1$ ) e a viscosidade ( $\mu_1$ ) do fluido 1 são diferentes daquelas para o fluido 2 ( $\rho_2$  e  $\mu_2$ ). Deseja-se determinar o perfil de velocidades completamente desenvolvido para regime permanente para os dois fluidos.



Equação de Navier-Stokes em coordenadas retangulares:

$$\rho \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] \quad (\text{eq 1})$$

Simplificando-se:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \quad (\text{regime permanente})$$

Só há escoamento na direção x:  $v_y=v_z=0$ .

Escoamento completamente desenvolvido:  $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$

Quantidade de movimento por difusão só na direção y:  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0$

Fica-se com:

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{eq 2})$$

O termo:

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \text{pressão modificada ou piezométrica}$$

Assim:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$$

E:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{eq 3})$$

Para cada fluido tem-se:

$$\frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \quad (\text{eq 4})$$

$$\frac{\partial^2 v_x^{(2)}}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \quad (\text{eq 5})$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \text{CC1: } v_x^{(1)} &= 0; y = H_1 \\ \text{CC2: } v_x^{(2)} &= 0; y = -H_2 \\ \text{CC3: } v_x^{(1)} &= v_x^{(2)}; y = 0 \\ \text{CC4: } \mu_1 \frac{dv_x^{(1)}}{dy} &= \mu_2 \frac{dv_x^{(2)}}{dy} \end{aligned}$$