

- (a) Calcule o intervalo de tempo, para o observador $\tilde{\mathcal{O}}_0$, entre as chegadas da luz vinda de sentidos opostos;
- (b) Relacione esse valor com a dessincronização calculada no exercício anterior e explique como o observador $\tilde{\mathcal{O}}_0$ pode interpretar essa relação.

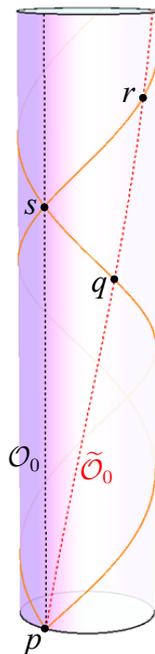


Figura 2.10: Diagrama espaço-tempo do perímetro de um carrossel, como na figura anterior, mas, agora, destacando apenas as linhas-de-mundo dos observadores \mathcal{O}_0 e $\tilde{\mathcal{O}}_0$ (linhas tracejadas preta e vermelha, respectivamente). No evento p , um *flash* de luz é emitido e os raios em sentidos opostos são confinados a se moverem ao longo do perímetro do carrossel (linhas amarelas). Esses raios de luz dão a volta no carrossel e atingem o observador inercial \mathcal{O}_0 simultaneamente (evento s). No entanto, esses raios de luz atingem o observador $\tilde{\mathcal{O}}_0$ em eventos distintos (q e r).

2.2.1 Observadores uniformemente acelerados e o *Rindler wedge*

Uma família de observadores particularmente relevante é a família de observadores *uniformemente acelerada*. Por “uniformemente acelerada” se quer dizer que *cada* observador dessa família possui uma *3-aceleração* (vide Exercício © para definição de 3-vetor) que, *em relação*

ao próprio observador, é constante. Além disso, a separação relativa entre os observadores (medida por eles mesmos) é fixa.

Para começar a construir essa família, começaremos determinando a linha-de-mundo de *um* de seus membros, que será nosso “observador fiducial” (em quem basearemos a construção que segue). A partir dela, as linhas-de-mundo dos outros membros serão obtidas impondo-se o repouso relativo entre eles. Restará, ainda, a tarefa de mostrar que todas as linhas-de-mundo obtidas dessa maneira representam, de fato, observadores uniformemente acelerados.

Adotando um evento qualquer $o \in \mathbb{M}$ para se estabelecer o isomorfismo $p \in \mathbb{M} \leftrightarrow x^a = \psi(o, p) \in \mathbb{V}$, seja $x^a(\tau)$ a linha-de-mundo de nosso observador fiducial, onde τ é o tempo-próprio ao longo dela. Como já definimos anteriormente, $u^a(\tau) = dx^a(\tau)/d\tau$ é a 4-velocidade associada. Define-se a 4-aceleração dessa linha-de-mundo através de

$$a^a(\tau) = \frac{du^a(\tau)}{d\tau}. \quad (2.11)$$

Evidentemente, a 4-aceleração fornece informação da taxa de mudança da 4-velocidade em relação ao tempo-próprio da própria linha-de-mundo. Uma propriedade interessante (e útil) da 4-aceleração é que ela é, também, um 3-vetor em relação ao próprio observador representado pela linha-de-mundo dada; ou seja, $g_{ab}u^a(\tau)a^b(\tau) = 0$. (Exercício: mostre isso!) Assim, a 4-aceleração já é, por construção, a 3-aceleração do observador em relação a si mesmo — de onde se vê que, ao contrário de velocidades, acelerações têm significado *absoluto*.

A imposição de que a 3-aceleração seja constante significa que se tomarmos a derivada da 4-aceleração e *projetarmos* o resultado ortogonalmente a u^a (para obter um 3-vetor associado), o resultado deve se anular:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{da^a(\tau)}{d\tau} \right)_\perp := h_b^a(\tau) \frac{da^b(\tau)}{d\tau} = \frac{da^a(\tau)}{d\tau} + \frac{u^a(\tau)u_b(\tau)}{c^2} \frac{da^b(\tau)}{d\tau} \\ &\implies \frac{da^a(\tau)}{d\tau} \propto u^a(\tau). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Com isso, definindo a chamada *aceleração própria* por $a := \|a^a\|$ — que mede a *intensidade* da aceleração de uma linha-de-mundo tipo-tempo em relação a ela própria —, temos

$$\frac{d}{d\tau}a(\tau) = \frac{1}{2a(\tau)} \frac{d}{d\tau} [g_{ab}a^a(\tau)a^b(\tau)] = \frac{1}{a(\tau)} g_{ab}a^a(\tau) \frac{da^b(\tau)}{d\tau} = 0, \quad (2.13)$$

onde na última igualdade usamos a Eq. (2.12) e a ortogonalidade de a^a

e u^a . Portanto, sendo $a(\tau) =: a_0 = \text{const.}$, temos:

$$\frac{d}{d\tau} a^a(\tau) = \frac{a_0^2}{c^2} u^a(\tau) = \frac{a_0^2}{c^2} \frac{d}{d\tau} x^a(\tau). \quad (2.14)$$

(Exercício: mostre a equação acima.) A equação acima implica que a 4-aceleração $a^a(\tau)$ de um observador uniformemente acelerado (com aceleração própria a_0) se relaciona com sua linha-de-mundo $x^a(\tau)$ através de

$$a^a(\tau) = \frac{a_0^2}{c^2} [x^a(\tau) - \kappa^a], \quad (2.15)$$

onde κ^a é um 4-vetor qualquer. Note que $g_{ab} a^a(\tau) a^b(\tau) = a_0^2 = \text{const.}$ implica que $\|x^a(\tau) - \kappa^a\| = c^2/a_0$. Geometricamente, isso significa que se definirmos o evento q por $\overrightarrow{oq} := \kappa^a$, então a linha-de-mundo $x^a(\tau)$ é determinada por eventos $p(\tau)$ que satisfazem $\mathcal{I}(q, p(\tau)) = c^4/a_0^2$. Além disso, a linha-de-mundo está contida no subespaço gerado por $u^a(\tau_0)$ e $a^a(\tau_0)$ (qualquer que seja τ_0 ; vide Eq. (2.16) abaixo); logo, é uma curva plana. Em resumo: uma linha-de-mundo uniformemente acelerada $x^a(\tau) = \overrightarrow{op(\lambda)}$ é dada pela intersecção do plano gerado por $u^a(\tau_0)$ e $a^a(\tau_0)$ com o lugar geométrico $\mathcal{I}(q, p) = c^4/a_0^2$, sendo q um evento fixo do plano. Essa intersecção determina uma hipérbole equilátera com assíntotas dadas por linhas-de-mundo de luz (vide **Fig. 2.11**). De fato, pode-se resolver explicitamente a Eq. (2.15) para se obter a equação dessa linha-de-mundo, como pedido no exercício abaixo:

- **Exercício:** Resolva a Eq. (2.15), obtendo

$$\begin{aligned} x^a(\tau) - \kappa^a &= [x^a(\tau_0) - \kappa^a] \cosh\left(\frac{a_0 \Delta\tau}{c}\right) + \frac{c u^a(\tau_0)}{a_0} \sinh\left(\frac{a_0 \Delta\tau}{c}\right) \\ &= \frac{c^2}{a_0} \left[\frac{a^a(\tau_0)}{a_0} \cosh\left(\frac{a_0 \Delta\tau}{c}\right) + \frac{u^a(\tau_0)}{c} \sinh\left(\frac{a_0 \Delta\tau}{c}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde $\Delta\tau := \tau - \tau_0$. Convença-se de que essa linha-de-mundo é exatamente a representada na **Fig. 2.11(b)**.

- **Exercício:** Seja $\{\mathbf{e}_\mu^a\}_{\mu=0,\dots,3}$ uma base tetrada de \mathbb{V} . Mostre que a base $\{\tilde{\mathbf{e}}_\mu^a(\tau)\}_{\mu=0,\dots,3}$, definida em cada evento $p(\tau)$ da linha-de-

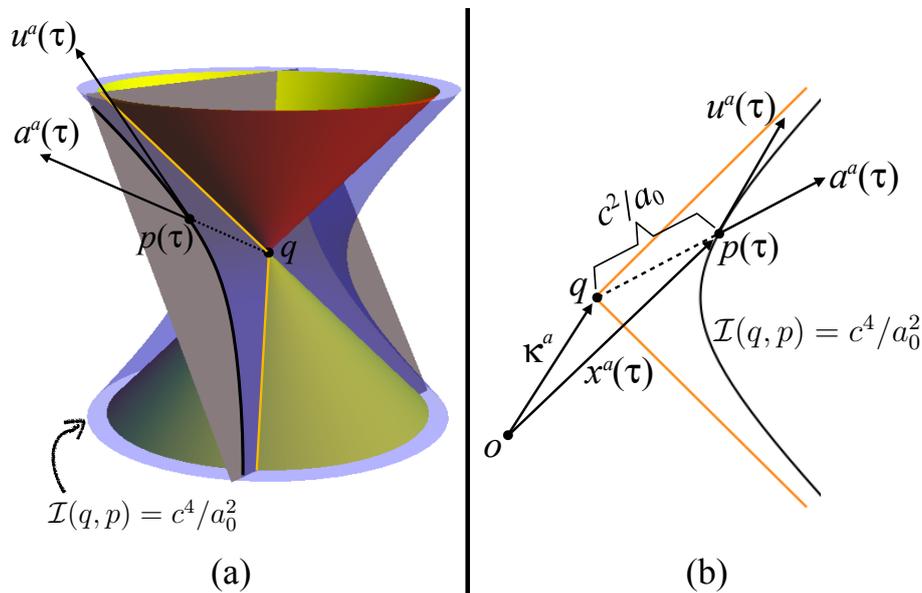


Figura 2.11: (a) A linha-de-mundo $p(\tau)$ de um observador uniformemente acelerado pode ser determinada pela intersecção do plano gerado pela sua 4-velocidade e 4-aceleração, com o lugar geométrico $\mathcal{I}(q, p) = c^4/a_0^2$, onde q é um evento do plano; (b) Representação bidimensional da mesma linha-de-mundo (o evento o não precisa pertencer ao plano mostrado).

mundo uniformemente acelerada anterior por

$$\tilde{\mathbf{e}}_0^a(\tau) = \mathbf{e}_0^a \cosh\left(\frac{a_0 \Delta\tau}{c}\right) + \mathbf{e}_1^a \sinh\left(\frac{a_0 \Delta\tau}{c}\right), \quad (2.17)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_1^a(\tau) = \mathbf{e}_0^a \sinh\left(\frac{a_0 \Delta\tau}{c}\right) + \mathbf{e}_1^a \cosh\left(\frac{a_0 \Delta\tau}{c}\right), \quad (2.18)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_2^a(\tau) = \mathbf{e}_2^a, \quad (2.19)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3^a(\tau) = \mathbf{e}_3^a, \quad (2.20)$$

é uma base que, além de tetrada, está adaptada a um observador uniformemente acelerado [ou seja, $u^a(\tau) \propto \tilde{\mathbf{e}}_0^a(\tau)$ e $a^a(\tau) \propto \tilde{\mathbf{e}}_1^a(\tau)$].

Com a ajuda dos resultados dos dois exercícios anteriores, podemos, agora, construir o restante da família uniformemente acelerada, encontrando as linhas-de-mundo dos outros membros. Como o observador fiducial, com linha-de-mundo dada pela Eq. (2.16), mede distâncias espaciais ao longo das direções dadas por $\{\tilde{\mathbf{e}}_j^a(\tau)\}_{j=1,2,3}$, podemos determinar qualquer outra linha-de-mundo que se mantenha a uma distância fixa da primeira por

$$x^a(\tau; (\zeta^j)_{j=1,2,3}) := x^a(\tau) + \zeta^j \tilde{\mathbf{e}}_j^a(\tau),$$

onde $x^a(\tau)$ é dado pela Eq. (2.16) e $\zeta^j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, 3$) são constantes que indexam diferentes linhas-de-mundo⁴ (note que o observador com o qual começamos a construção é indexado por $\zeta^j = 0$). Substituindo as Eqs. (2.16-2.20) nessa expressão, temos:

$$\begin{aligned} x^a(\tau; (\zeta^j)_{j=1,2,3}) - \kappa^a &= \zeta^2 \mathbf{e}_2^a + \zeta^3 \mathbf{e}_3^a \\ &+ \left(\frac{c^2}{a_0} + \zeta^1 \right) \left[\mathbf{e}_0^a \sinh \left(\frac{a_0 \Delta \tau}{c} \right) + \mathbf{e}_1^a \cosh \left(\frac{a_0 \Delta \tau}{c} \right) \right] \\ &= \left(\frac{c^2}{a_0} + \zeta^1 \right) \tilde{\mathbf{e}}_1^a(\tau) + \zeta^2 \mathbf{e}_2^a + \zeta^3 \mathbf{e}_3^a. \end{aligned} \quad (2.21)$$

O exercício a seguir nos ajuda a interpretar geometricamente essas linhas-de-mundo:

• **Exercício:** Mostre que

$$x^a(\tau; (\zeta^j)_{j=1,2,3}) = x^a(\tilde{\tau})|_{a_0 \mapsto a(\zeta^1), \kappa^a \mapsto \tilde{\kappa}^a}$$

com

$$a(\zeta^1) = \frac{a_0}{(1 + a_0 \zeta^1 / c^2)}, \quad \tilde{\kappa}^a = \kappa^a + \zeta^2 \mathbf{e}_2^a + \zeta^3 \mathbf{e}_3^a$$

e

$$\tilde{\tau} = \left(1 + \frac{a_0 \zeta^1}{c^2} \right) \tau.$$

Colocando em palavras o resultado do exercício anterior, temos que a linha-de-mundo de cada membro da família de observadores construída, indexada por $(\zeta^j)_{j=1,2,3}$, pode ser obtida a partir da linha-de-mundo original $x^a(\tau)$ mudando-se a aceleração própria, $a_0 \mapsto a_0 / (1 + a_0 \zeta^1 / c^2)$ — o que muda a abertura da hipérbole, mas mantém suas assíntotas —, e transladando-a “rigidamente” pelo 4-vetor espacial $\zeta^2 \mathbf{e}_2^a + \zeta^3 \mathbf{e}_3^a$, ortogonal à 3-aceleração. Portanto, todos os membros dessa família, à semelhança do observador com o qual começamos, são uniformemente acelerados — como havíamos nos proposto a demonstrar. Note que devemos impor a restrição $\zeta^1 > -c^2/a_0$, pois nenhum observador físico pode estar sujeito a uma aceleração própria divergente. Diferentemente de famílias de observadores inerciais, que podem ser usadas para “cobrir” todo o espaço-tempo, cada família de observadores uniformemente

⁴Sendo cautelosos, deveríamos, inicialmente, restringir os valores de ζ^j a valores “pequenos”, utilizando apenas conceitos *locais* de distância a partir da linha-de-mundo fiducial. No entanto, as seções espaciais dessas novas linhas-de-mundo, como ficará claro adiante, *coincidem* com a seção espacial da linha-de-mundo fiducial. Isso significa que as medidas locais de distância podem ser estendidas para separações macroscópicas, usando diretamente as seções espacial do observador fiducial. Isso justifica, *a posteriori*, não termos feito nenhuma restrição, por enquanto, nos valores de ζ^j .

acelerada “cobre” apenas uma porção do espaço-tempo de Minkowski, denominada *Rindler wedge*. A **Fig. 2.12** abaixo representa, entre outras coisas, essa família de linhas-de-mundo uniformemente aceleradas e a região do espaço-tempo que elas “cobrem” (o *Rindler wedge*).

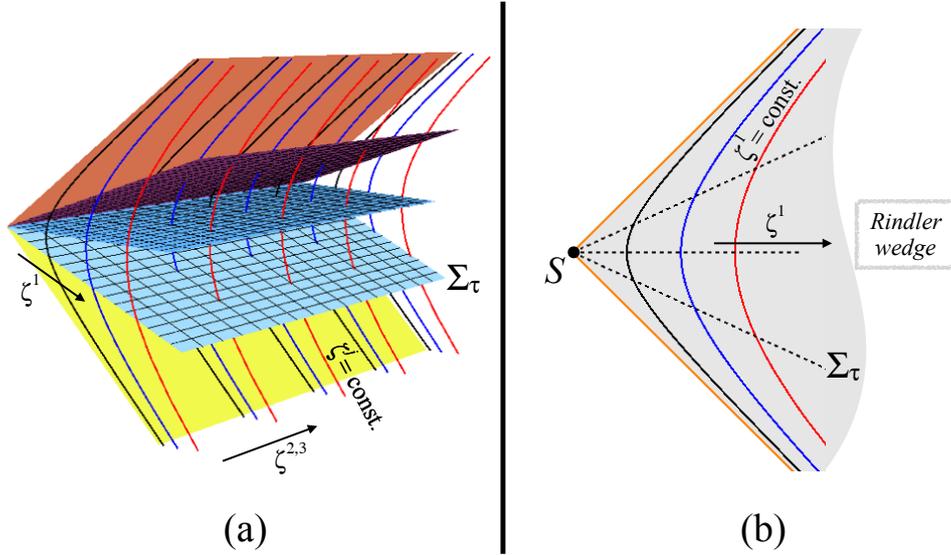


Figura 2.12: (a) Representação, num diagrama espaço-tempo (1+2)-dimensional, das linhas-de-mundo de uma família de observadores uniformemente acelerada (hipérbolas), de algumas de suas seções espaciais Σ_τ (planos azuis) e das superfícies tipo-luz formadas pelas assíntotas das linhas-de-mundo (planos amarelo e laranja). Cada linha-de-mundo é indexada por um valor fixo de $(\zeta^j)_{j=1,2,3}$; (b) Representação (1+1)-dimensional dos mesmos objetos que em (a). A intersecção de todas as seções espaciais, S , corresponde a um *plano* euclidiano (e não a um único evento, como em figuras semelhantes, como a **2.11(b)**). A região do espaço-tempo de Minkowski coberta por uma família de observadores uniformemente acelerada é denominada de *Rindler wedge*.

Uma maneira mais algébrica de se obter as mesmas informações que as obtidas acima, acerca das linhas-de-mundo descritas pela Eq. (2.21), é fazendo uso dessa expressão para se calcular as 4-velocidades e, em seguida, as 4-acelerações associadas a essas linhas-de-mundo. Começemos derivando a Eq. (2.21) em relação a τ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} x^a(\tau; (\zeta^j)_{j=1,2,3}) &= \left(c + \frac{a_0 \zeta^1}{c} \right) \left[\mathbf{e}_0^a \cosh \left(\frac{a_0 \Delta\tau}{c} \right) + \mathbf{e}_1^a \sinh \left(\frac{a_0 \Delta\tau}{c} \right) \right] \\ &= \left(c + \frac{a_0 \zeta^1}{c} \right) \tilde{\mathbf{e}}_0^a(\tau). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Curiosamente, note que esse 4-vetor, que é tangente à linha-de-mundo de um membro arbitrário da família construída, *não* é uma 4-velocidade se $\zeta^1 \neq 0$, pois sua normalização não bate com a esperada ($g_{ab}u^a u^b = -c^2$). Isso significa que o parâmetro τ utilizado nessas linhas-de-mundo *não* é o tempo-próprio do observador que elas representam, a não ser que $\zeta^1 = 0$ — como é o caso, em particular, do observador com o qual iniciamos nossa construção. Mas podemos fazer uso da Eq. (2.9) para relacionar o parâmetro τ com o tempo-próprio $\tilde{\tau}$ desses observadores genéricos, reobtendo o resultado já encontrado no exercício anterior:

- **Exercício:** Mostre, utilizando a Eq. (2.9), que o tempo-próprio $\tilde{\tau}$ de um observador genérico da família construída acima, indexado por $(\zeta^j)_{j=1,2,3}$, é dado por

$$\tilde{\tau} = \left(1 + \frac{a_0 \zeta^1}{c^2}\right) \tau.$$

- **Exercício:** Utilizando o resultado do exercício anterior, pede-se:
 - (a) Calcule a 4-aceleração de um observador genérico da família construída acima;
 - (b) Verifique que a condição de 3-aceleração constante, dada pela Eq. (2.12), é satisfeita para esse observador genérico;
 - (c) A partir do resultado do item (a), calcule a aceleração própria desse mesmo observador genérico, reobtendo o resultado do exercício anterior:

$$a(\zeta^1) = \frac{a_0}{(1 + a_0 \zeta^1 / c^2)}.$$

Quanto à percepção de espaço dessa família de observadores uniformemente acelerada, note que a 4-velocidade de *cada* membro dessa família, no evento $x^a(\tau; (\zeta^j)_{j=1,2,3})$ de sua linha-de-mundo, é igual à 4-velocidade do observador fiducial $u^a(\tau)$ — o que pode ser visto normalizando-se apropriadamente a Eq. (2.22). Logo, as direções que são puramente espaciais para o observador fiducial em $x^a(\tau)$, a saber, as determinadas por $\{\tilde{\mathbf{e}}_j(\tau)\}_{j=1,2,3}$ dados pelas Eqs. (2.18-2.20), também são puramente espaciais para os outros observadores uniformemente acelerados em $x^a(\tau; (\zeta^j)_{j=1,2,3})$, qualquer que seja ζ^j . Sendo assim, a seção espacial Σ_τ dessa família de observadores uniformemente acelerada, que passa pelo evento $x^a(\tau)$ da linha-de-mundo fiducial, é diretamente dada pelos eventos $x^a(\tau; (\zeta^j)_{j=1,2,3})$ com τ fixo, variando-se os valores de ζ^j (volte à definição de $x^a(\tau; (\zeta^j)_{j=1,2,3})$, na expressão *anterior* à Eq. (2.21), e entenda o porquê):

$$\Sigma_\tau := \{r \in \mathbb{M}; \vec{or} = x^a(\tau; (\zeta^j)_{j=1,2,3}), \zeta^1 > -c^2/a_0, \zeta^{2,3} \in \mathbb{R}\}. \quad (2.23)$$

A **Fig. 2.12** representa, também, algumas dessas seções espaciais. Note que, embora as superfícies Σ_τ pudessem ser matematicamente estendidas para valores $\zeta^1 \leq -c^2/a_0$, isso não faria sentido físico, uma vez que já vimos que não é possível se ter um observador físico em $\zeta^1 = -c^2/a_0$.

Famílias uniformemente aceleradas desempenham um papel importante em diferentes contextos, tanto em física clássica, quanto em teoria quântica. Mais adiante, analisaremos um desses papéis, quando discutirmos o chamado *princípio de equivalência*, que é uma peça fundamental na generalização da Relatividade Restrita para incluir situações em que campos gravitacionais estão presentes.

2.3 Simetrias: os grupos de Poincaré e de Lorentz

Para concluir este capítulo, no qual estamos investigando as propriedades do espaço-tempo de Minkowski advindas das estruturas introduzidas no capítulo anterior, vamos analisar as *simetrias* de \mathbb{M} . Um mapeamento $\iota : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ é dito ser uma *transformação de simetria* (ou *isometria*) do espaço-tempo \mathbb{M} se for uma bijeção que satisfaça

$$\mathcal{I}(\iota(p), \iota(q)) = \mathcal{I}(p, q)$$

para todo par de eventos p, q . Em palavras: ι é uma simetria (isometria) se preservar o intervalo invariante entre pares de eventos. Denotemos por \mathcal{P} o conjunto de *todas* as isometrias de \mathbb{M} :

$$\mathcal{P} := \{\iota : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}; \exists \iota^{-1} \text{ e } \mathcal{I}(\iota(p), \iota(q)) = \mathcal{I}(p, q), p, q \in \mathbb{M}\}.$$

O exercício abaixo mostra uma propriedade interessante desse conjunto:

- **Exercício:** Mostre que o conjunto \mathcal{P} de isometrias possui uma estrutura natural de *grupo*, considerando a operação binária do grupo como sendo a composição de mapeamentos: $\iota_1, \iota_2 \in \mathcal{P}$, $(\iota_1 \cdot \iota_2)(p) := \iota_1(\iota_2(p))$, $p \in \mathbb{M}$ (ou seja, $\iota_1 \cdot \iota_2 := \iota_1 \circ \iota_2$, onde o símbolo \circ denota composição de mapeamentos).

Esse *grupo de isometrias* do espaço-tempo de Minkowski é denominado *grupo de Poincaré*. Nossa tarefa, nesta seção, será determinar explicitamente todos os elementos desse grupo.

Como estamos, ainda, evitando introduzir sistemas de coordenadas para rotular os eventos de \mathbb{M} , faremos uso da estrutura subjacente de espaço afim de \mathbb{M} para obter a forma explícita dos elementos de \mathcal{P} . A estratégia resume-se em se explorar a “identificação” entre \mathbb{M} e \mathbb{V} provida por $\psi_o(p) := \psi(o, p)$, fixado um evento $o \in \mathbb{M}$ *qualquer*. Assim,