

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM 2 - INTRODUÇÃO

1. TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

O enunciado do Teorema é muito semelhante ao caso de ordem 1, é necessário apenas prefixar também a derivada no ponto inicial..

Teorema 1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, aberto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Então, para cada $(x_0, y_0, y_1) \in \Omega$, existe um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ com $(x, \Phi(x), \Phi'(x)) \in \Omega$, para cada $x \in I$, que solução do problema de valor inicial:*

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases}$$

A demonstração pode ser feita primeiro transformando a 1 no sistema equivalente:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z \\ \frac{dz}{dx} = f(x, y, z) \\ y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = y_1. \end{cases}$$

2. EQUAÇÕES REDUTÍVEIS À PRIMEIRA ORDEM

Algumas EDOs de ordem 2 podem ser transformadas, por mudança de variáveis em 2 equações de ordem 1. Temos 2 casos:

(1) (Variável dependente ausente). São equações do tipo:

$$F(x, y', y'') = 0.$$

(2) (Variável independente ausente). São equações do tipo:

$$F(y, y', y'') = 0.$$

No caso (1), fazemos

$$y' = p,$$

$$F(x, p, p') = 0.$$

Resolvemos para p e integramos para encontrar y .

No caso (2), fazemos

$$y' = p, y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$$

$$F(y, p, \frac{dp}{dy} p) = 0.$$

Resolvemos para p e integramos para encontrar y .

Exercício 2. *Encontre a solução geral das equações:*

$$(1) x^2 y'' = 2xy' + (y')^2.$$

$$(2) yy'' + (y')^2 = 0.$$

Em geral, não podemos resolver explicitamente essas equações. Além das redutíveis à primeira ordem, uma exceção importante são as equações lineares, como veremos.