Universidade de São Paulo

SLC0608 - Cálculo II
Resolução da Lista 1 - Exercícios do 1 ao 20

Clara Andrade Sapio

24 de setembro de 2020

QUESTÃO 1

Observação : esse exercício nos pede para desenhar a curva indicando a orientação. Entretanto não é fornecido nenhuma informação a respeito da orientação da curva (não é fornecido o ponto de partida da curva e o ponto final). Dessa forma, os sentidos (indicados pelas setinhas em cada gráfico) foram escolhidos de forma arbitrária.

a) $x(t) = t - 2\,;\, y(t) = 2t + 3$

Da equação de x(t), vamos isolar nosso parâmetro t. Dessa forma temos que:

$$t = x + 2$$

Substituindo o parâmetro $t = x + 2$ na equação para y(t), temos:

$$y = 2(x + 2) + 3 \;\Rightarrow\; y = 2x + 7$$

Que é a equação de uma reta de coeficientes angular 2 e linear 7.

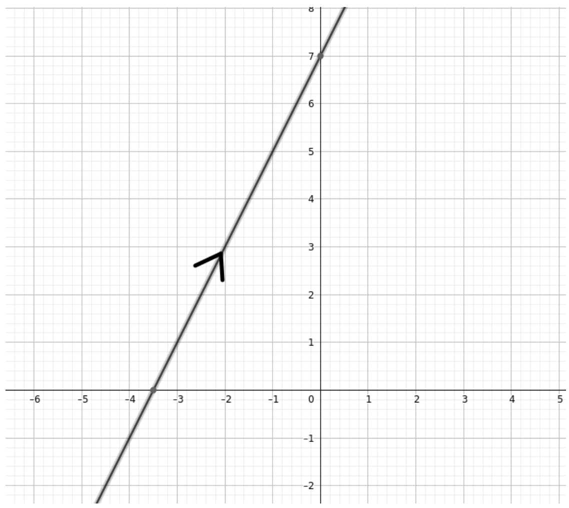

Figura 1: Traço da curva

b) $x(t) = t^2 + 1\,;\, y(t) = t^2 - 1$

Da equação de x(t), temos que $t^2 = x - 1$. Substituindo t^2 na equação de y(t) temos:

$$y = x - 1 - 1 \Rightarrow y = x - 2$$

Que é a equação de uma reta com coeficiente angular igual a 1, e coeficiente linear -2.

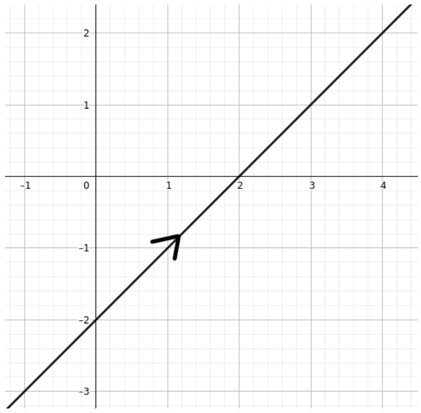

Figura 2: Traço da curva

c) $x(t) = 4t^2 - 5\,;\, y(t) = 2t + 3$

Isolando o parâmetro t da equação de y(t) temos:

$$2t = y - 3 \Rightarrow t = \frac{y-3}{2}$$

Substituindo na equação de x(t):

$$x = 4\left(\frac{y-3}{4}\right)^2 - 5 \Rightarrow x = 4\frac{(y^2-6y+9)}{4} - 5$$

$$x = y^2 - 6y + 9 - 5 \Rightarrow x = y^2 - 6y + 4$$

Essa equação representa uma espécie de "parábola horizontal"(é o x que depende de y^2 e não o habitual da parábola $y = x^2$ que estamos acostumados).

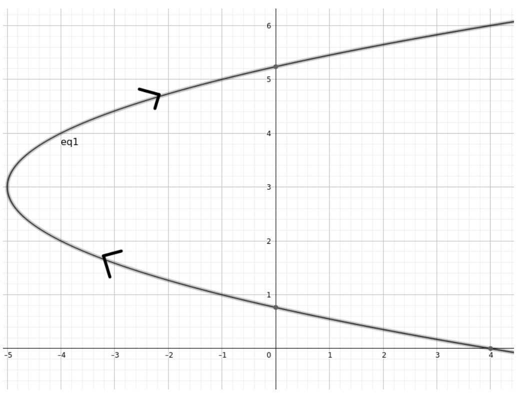

Figura 3: Traço da curva

d) $x(t) = e^t\,;\, y(t) = e^{-2t}$

Podemos escrever a equação de y(t) da seguinte maneira:

$$y(t) = (e^t)^{-2} \Rightarrow y = (x)^{-2} \Rightarrow\; y = \frac{1}{x^2}$$

Sabendo que y depende do inverso de x^2, temos que $y \geq 0$. Jogando alguns pontos para podermos plotar o gráfico, chegamos à seguinte configuração:

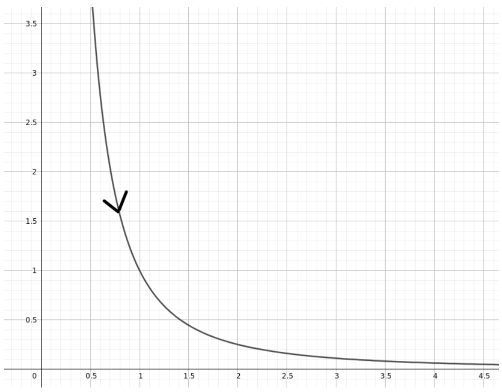

Figura 4: Traço da curva

e) $x(t) = t^2$; $y(t) = 2lnt$

Utilizando as propriedades das funções logarítmicas, conseguimos achar uma relação entre x e y:

$$y(t) = 2lnt \Rightarrow y(t) = ln(t^2) \Rightarrow y = ln(x)$$

Logo, essa parametrização de curva representa a função ln(x), cujo gráfico é igual à figura 5 abaixo.

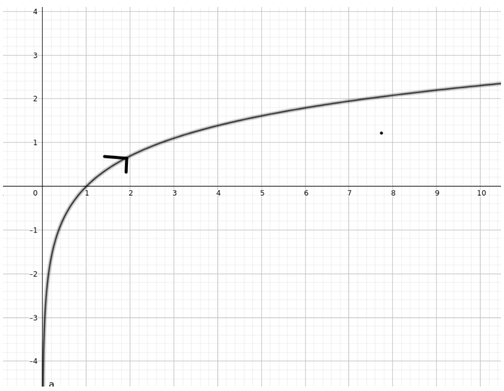

Figura 5: Traço da curva

QUESTÃO 2

Observação: Nessa questão temos os pontos iniciais e finais da curva parametrizada, o que significa que, diferentemente da questão 1, agora o exercício nos dá a orientação da curva a partir do intervalo de t. Temos que interpretar esse intervalo e pegar pontos que nos deêm a informação sobre a orientação da curva a ser plotada.

a) $\gamma(t) = (sen(t), cos(t))\ t \in [0, 2\pi]$

$$x(t) = sen(t) \;\; e \;\; y(t) = cos(t)$$

Perceba que

$$sen^2(t) + cos^2(t) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Comparando essa equação com a equação da circunferência de centro (x_0, y_0) e raio r $((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2)$, vemos que nossa equação $(x^2 + y^2 = 1)$ trata-se de uma cincunferência de centro (0,0) e raio 1.

Agora para averiguarmos a orientação da nossa curva, precisamos analisar o intervalo dado ($t \in [0, 2\pi]$). Perceba que a nossa curva parte do ponto $\gamma(0)$ e chega ao ponto $\gamma(2\pi)$. Entretanto, temos que $\gamma(0) = (sen(0), cos(0)) = (0, 1)$ e $\gamma(2\pi) = (sen(2\pi), cos(2\pi)) = (0, 1)$. Como $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, se pegarmos somente esses dois pontos não chegaremos a nenhuma conclusão a respeito da orientação da curva (pois ela começa e termina no mesmo ponto). Precisamos então pegar pontos intermediários. Usaremos $t = \pi/2$ e $t = \pi$.

$$\gamma(\pi/2) = (sen(\pi/2), cos(\pi/2)) = (1, 0)$$

$$\gamma(\pi) = (sen(\pi), cos(\pi)) = (0, -1)$$

Isso significa que dado o intervalo de t começando em 0 e terminando em 2π, nossa curva parte do ponto (0,1) = $\gamma(0)$, segue em direção ao ponto (1,0) = $\gamma(\pi/2)$, depois vai para o ponto (0,-1) = $\gamma(\pi)$ e assim vai até voltar para o ponto de partida ($\gamma(2\pi) = (0, 1)$). Dessa forma, temos o seguinte desenho com a respectiva orientação:

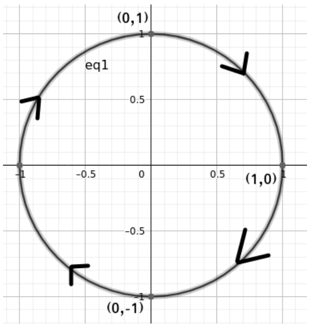

Figura 6: Traço da curva

b) $\gamma(t) = (sen(2t), cos(2t)) \;\; t \in [0, 2\pi]$

$$x(t) = sen(2t) \;\; e \;\; y(t) = cos(2t)$$

Novamente, temos $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$ circunferência de centro (0,0) e raio 1. Para acharmos a orientação, novamente vamos pegar pontos seguindo o nosso intervalo que começa em 0 e termina em 2π.

$$\gamma(0) = (sen(0), cos(0)) = (0, 1)$$

$$\gamma(\pi/4) = (sen(\pi/2), cos(\pi/2)) = (1, 0)$$

$$\gamma(\pi/2) = (sen(\pi), cos(\pi)) = (0, -1)$$
$$\gamma(2\pi) = (sen(4\pi), cos(4\pi)) = (0, 1)$$

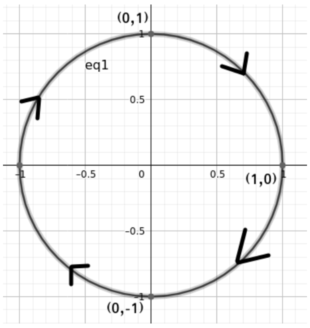

Figura 7: Traço da curva

c) $\gamma(t) = (5cos(t), 2sen(t))\ \ t \in [0, 2\pi]$

$$x(t) = 5cos(t) \Rightarrow cos(t) = \frac{x}{5}$$
$$y(t) = 2sen(t) \Rightarrow sen(t) = \frac{y}{2}$$

Utilizando a relação fundamental da trigonometria e substituindo cos(t) e sen(t) em função de x e y como encontrado acima, temos:

$$cos^2(t) + sen^2(t) = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Esta é a equação de uma elipse de semi-eixo maior x (quando y = 0, x = 5) e semi-eixo menor y (quando x = 0, y = 2). Agora precisamos substituir pontos partindo de t = 0 até t = 2π para encontrarmos a orientação da curva:

$$\gamma(0) = (5cos(0), 2sen(0)) = (5, 0)$$
$$\gamma(\pi/2) = (5cos(\pi/2), 2sen(\pi/2)) = (0, 2)$$
$$\gamma(2\pi) = (5cos(2\pi), 2sen(2\pi)) = (5, 0)$$

Sendo assim, temos o seguinte desenho:

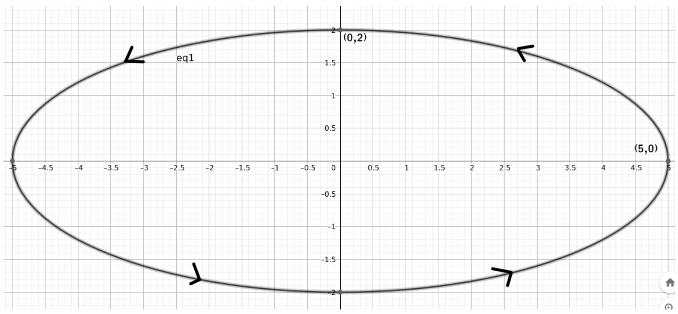

Figura 8: Traço da curva

d) $\gamma(t) = (t, t^3)\ \ t \in [-3, 3]$

$$x(t) = t$$
$$y(t) = t^3$$

Substituindo x = t na equação de y(t), temos:

$$y = x^3$$

Como nesse caso a curva não se fecha (não volta para o mesmo ponto), podemos simplesmente analisar os pontos inicial($\gamma(-3)$) e final ($\gamma(3)$) para colocarmos a orientação da curva.

$$\gamma(-3) = (-3, (-3)^3) = (-3, -27)$$
$$\gamma(3) = (3, 3^3) = (3, 27)$$

Portanto, o ponto de partida da nossa curva é o ponto (-3,-27) e o ponto onde a cuvra "acaba"é o ponto (3,27).

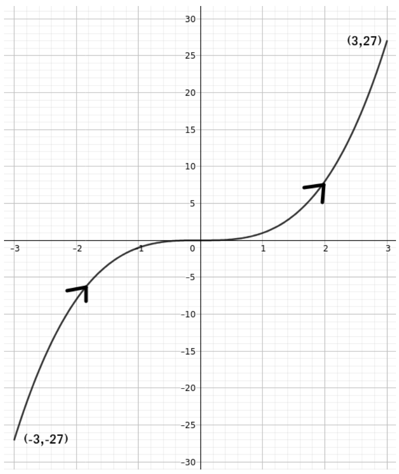

Figura 9: Traço da curva

e) $\gamma(t) = (t^4, t^2)\ t \in [-1, 1]$

$$x(t) = t^4$$
$$y(t) = t^2$$

Substituindo $y = t^2$ na equação de x(t) temos:

$$x = (t^2)^2 \Rightarrow x = y^2$$

O que nos dá uma "parábola horizontal". Perceba que novamente o ponto inicial da curva ($\gamma(-1)$) vai coincidir com o ponto final ($\gamma(1)$), então precisamos pegar pontos intermediários para conseguir determinar uma orientação.

$$\gamma(-1) = ((-1)^4, (-1)^2) = (1,1)$$
$$\gamma(0) = (0^4, 0^2) = (0,0)$$
$$\gamma(1) = (1^4, 1^2) = (1,1)$$

À princípio podemos achar que existe alguma incoerência nesses pontos, pois a nossa curva (uma espécie de parábola "deitada") não se fecha, e mesmo assim ela começa e termina no mesmo ponto. Entretanto, o que isso significa na prática é que a curva é percorrida duas vezes: inicialmente ela sai do ponto (1,1) = $\gamma(-1)$ e vai em direção ao ponto (0,0) = $\gamma(0)$ e em seguida ela sai desse ponto (0,0) e retorna ao ponto (1,1) = $\gamma(1)$. Isso ocorre porque nossa curva é tal que $\gamma(t) = \gamma(-t)\ \forall t \in [-1, 1]$.

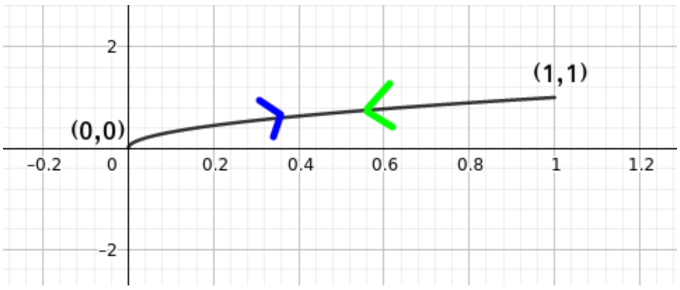

Figura 10: Traço da curva. Em verde temos a ida de (1,1) à (0,0) e em azul temos a orientação da volta de (0,0) até (1,1).

QUESTÃO 3

Observação: Para verificarmos se existe $\lim_{t \to t_0} \gamma(t)$ precisamos verificar se o limite de cada uma das componentes de $\gamma(t)$ existe quando $t \to t_0$. Termos como $\frac{"0"}{0}$ foram usados para indicar que temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

a) $\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}, t^2, \frac{t-1}{1}\right)$, $t_0 = 1$

I) $x(t) = \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}$

$$\lim_{t \to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1} = \frac{"0"}{0} \Rightarrow \lim_{t \to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1} \cdot \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+1} = \lim_{t \to 1} \frac{\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)}(\sqrt{t}+1)} = \lim_{t \to 1} \frac{1}{\sqrt{t}+1} = \frac{1}{2}$$

II) $y(t) = t^2$

$$\lim_{t \to 1} t^2 = 1$$

III) $z(t) = \frac{t-1}{t}$

$$\lim_{t \to 1} \frac{t-1}{t} = 0$$

Portanto, existe $\lim_{t\to 1}\gamma(t)$ e ele vale (1/2,1,0).

b) $\gamma(t) = \left(\frac{tg(3t)}{t}, \frac{e^{2t}-1}{t}, t^3\right), \ t_0 = 0$

I) $x(t) = \frac{tg(3t)}{t}$

$$\lim_{t\to 0}\frac{tg(3t)}{t} = \frac{"0"}{0} \Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{sen(3t)}{cos(3t)}$$

Multiplicando e dividindo tudo por 3 obtemos:

$$\lim_{t\to 0}\frac{3}{3t}\cdot\frac{sen(3t)}{cos(3t)} = 3\lim_{t\to 0}\frac{sen(3t)}{3t}\cdot\frac{1}{cos(3t)} = 3\cdot 1\cdot 1 = 3$$

(Perceba que temos o limite fundamental ($\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = 1$) e a outra fração ($\frac{1}{cos(3t)}$) tende a 1 quanto $t\to 0$. Aplicamos então o produto de limites e multiplicamos pela constante 3 que tiramos para fora do limite).

II) y(t) = $\frac{e^{2t}-1}{t}$

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t} = \frac{"0"}{0}$$

Aplicando L'Hôpital (derivando o numerador e o denominador), temos:

$$\lim_{t\to 0}\frac{2e^{2t}}{1} = \lim_{t\to 0}2e^{2t} = 2$$

III) $z(t) = t^3$

$$\lim_{t\to 0}t^3 = 0$$

Portanto, existe $\lim_{t\to 0}\gamma(t)$ e ele vale (3,2,0).

c) $\gamma(t) = \left(\frac{t^3-8}{t^2-4}, \frac{cos(\pi/t)}{t-2}, 2t\right), \ t_0 = 2$

I) $x(t) = \frac{t^3-8}{t^2-4}$

$$\lim_{t\to 2} = \frac{"0"}{0}$$

Aplicando a Regra de L'Hôpital (derivando o numerador e o denominador):

$$\lim_{t\to 2}\frac{3t^{\cancel{2}}}{2\cancel{t}} = \lim_{t\to 2}\frac{3t}{2} = 3$$

II) $y(t) = \frac{cos(\pi/t)}{t-2}$

$$\lim_{t\to 2}\frac{cos(\pi/t)}{t-2} = \frac{"0"}{0}$$

Reescrevendo o argumento do cosseno e aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{t\to 2}\frac{cos(\pi t^{-1})}{t-2} = \lim_{t\to 2}\frac{(-1)\pi t^{-2}[-sen(\pi t^{-1})]}{1} = \lim_{t\to 2}\frac{\pi sen(\pi/t)}{t^2} = \frac{\pi}{4}$$

III) $z(t) = 2t$

$$\lim_{t\to 2} 2t = 4$$

Portanto, existe $\lim_{t\to 2}\gamma(t)$ e ele vale (3,π/4,4).

QUESTÃO 4

Observação: o vetor tangente à curva $\gamma(t)$ em um ponto t_0 é o vetor composto pelas derivadas de cada uma das componentes de $\gamma(t)$ calculadas no ponto. Isto é, se $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, o vetor tangente à curva γ em t_0 será $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. A reta tangente t no ponto t_0 será dada de forma análoga à aprendida no estudo de funções de uma variável:

$$t : \gamma(t_0) + \lambda\gamma'(t_0)$$

Com λ um parâmetro real.

a) $\gamma(t) = (t^3 - t^2, ln(t^2-1))$ *e* $\gamma(2)$

$$\gamma'(t) = (3t^2 - 2t, \frac{2t}{t^2-1}) \Rightarrow \gamma'(2) = (3\cdot 2^2 - 2\cdot 2, \frac{2\cdot 2}{2^2-1})$$

Portanto, o vetor tangente à curva no ponto $\gamma(t_0)$ será:

$$\gamma'(2) = (8, \frac{4}{3})$$

Agora só falta calcularmos o ponto $\gamma(2)$ (basta substituir t = 2 na expressão de $\gamma(t)$).

$$\gamma(2) = (2^3 - 2^2, ln(2^2-1)) \Rightarrow \gamma(2) = (4, ln(3))$$

Portanto, a equação da reta tangente t será:

$$t : (4, ln(3)) + \lambda(8, \frac{4}{3}) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $\gamma(t) = (3t^2, e^{-t}, cos(t-1))\ e\ \gamma(0)$

$$\gamma'(t) = (6t, -e^{-t}, -sen(t-1)) \Rightarrow \gamma'(0) = (0, -1, -sen(-1))$$

Logo, o vetor tangente à curva $\gamma(t)$ no ponto $\gamma(0)$ é:

$$\gamma'(0) = (0, -1, -sen(-1))$$

Agora só falta calcularmos o ponto $\gamma(0)$ (basta substituir t = 0 na expressão de $\gamma(t)$).

$$\gamma(0) = (3 \cdot 0^2, e^0, cos(0-1)) \Rightarrow \gamma(0) = (0, 1, cos(-1))$$

Dessa forma, a equação da reta tangente t será:

$$t : (0, 1, cos(-1)) + \lambda(0, -1, -sen(-1)) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

c) $\gamma(t) = (t, t^2)\ e\ \gamma(1)$

$$\gamma'(t) = (1, 2t) \Rightarrow \gamma'(1) = (1, 2)$$

Portanto, o vetor tangente à curva γ no ponto $\gamma(1)$ é:

$$\gamma'(1) = (1, 2)$$

Agora só falta calcularmos o ponto $\gamma(1)$ (basta substituir t = 1 na expressão de $\gamma(t)$).

$$\gamma(1) = (1, 1^2) \Rightarrow \gamma(1) = (1, 1)$$

Assim, a equação da reta tangente t será:

$$t : (1, 1) + \lambda(1, 2) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

QUESTÃO 5

a) $f(x, y) = 2x - y^2$

Como podemos perceber, não há restrição no domínio e nem na imagem de f e, portanto: $\boxed{D_f = \mathbb{R}^2 \text{ e } Im_f = \mathbb{R}}$

b) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 + y^2}$

$\sqrt{4 - x^2 + y^2} \geq 0 \Rightarrow$ 4-x$^2 + y^2 \geq 0$

Multiplicando por (-1) obtemos:

$$x^2 - y^2 \leq 4$$

Portanto, $\boxed{D_f = \{(x,y)\,\epsilon\,\mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 \leq 4\}}$

Como estamos trabalhando com números reais, o resultado da raiz é sempre positivo e então: $\boxed{Im_f = [0, +\infty)}$

c) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y}-1}{x+y-1}$

Do numerador: $\sqrt{x+y} \geq 0 \Rightarrow$x+y ≥ 0
Do denominador: $x + y - 1 \neq 0 \Rightarrow$x+y $\neq 1$
Portanto, $\boxed{D_f = \{(x,y)\,\epsilon\,\mathbb{R}^2 | x + y \geq 0 \ e \ x + y \neq 1\}}$

Para encontrarmos a imagem de f(x,y), perceba que no intervalo de $0 \leq x + y < 1$ tanto a expressão do numerador ($\sqrt{x+y} - 1$) quanto à do denominador $(x + y - 1)$ serão negativas. Como eles têm o mesmo sinal, conclui-se que f será positiva. Para $x + y > 1$, o numerador e o denominador são positivos e portanto f também será positiva nesse intervalo. Isso significa que a função f(x,y) é positiva em todo o seu domínio, logo, $\boxed{Im_f = (0, +\infty)}$

d) $f(x,y,z) = \frac{x-z}{x^2+y^2}$

$x^2 + y^2 \neq 0 \Rightarrow$ (x,y) $\neq (0,0)$ $\boxed{D_f = \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) | x = y = 0\}}$ $\boxed{Im_f = \mathbb{R}}$

e) f(x,y,z) = ln(x+y+z+1)

Como não existe uma potência de e que resulte em um número igual ou menor que zero, o argumento da função ln deve ser sempre estritamente maior do que zero. Assim:

$$x + y + z + 1 > 0 \Rightarrow x + y + z > -1$$

Assim, $\boxed{D_f = \{(x,y,z)\,\epsilon\,\mathbb{R}^3 | x + y + z > -1\}}$ e $\boxed{Im_f = \mathbb{R}}$

QUESTÃO 6

a) $f(x,y) = sen(\frac{1}{xy})$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0 \ e \ y \neq 0\}$

Como sabemos, a função seno é sempre limitada, pois $-1 \leq sen(\theta) \leq 1$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$. Logo, f(x,y) é limitada.

b) $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Perceba que $x^2 \leq x^2 + y^2$. Tirando a raiz dos dois lados temos: $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$, ou seja, $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ e, portanto:

$$-\sqrt{x^2+y^2} \leq x \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Dividindo todos os termos por $\sqrt{x^2+y^2}$, temos:

$$-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$$

Portanto f(x,y) é limitada $(-1 < f(x,y) < 1)$.

c) $f(x,y) = ln(x+y)$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y > 0\}$

f(x,y) não é limitada e como a função ln é crescente, f(x,y) é crescente em D_f.

d) $f(x,y,z) = \frac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

$D_f = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

Note que:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2+z^2} - \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Analisando cada uma das frações temos:
I)

$$-\frac{z^2}{z^2} \leq -\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} \leq 0 \;\Rightarrow\; -1 \leq \frac{-z^2}{x^2+y^2+z^2} \leq 0$$

II) Agora precisamos mostrar que $\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}$ é limitada. Inicialmente, devemos lembrar que $|x| = \sqrt{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$|xy| = |x||y| = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = x^2+y^2+z^2$$

Dessa forma, temos:

$$|xy| \leq x^2+y^2+z^2 \Rightarrow \frac{|xy|}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{|xy|}{x^2+y^2+z^2} \leq 1$$

Portanto:

$$-1 \leq \frac{xy}{x^2+y^2+z^2} \leq 1$$

Dessa forma como f(x,y,z) é a soma de duas funções limitadas, segue que f é limitada.

e) $f(x,y,z) = cos(\frac{xyz^9}{\sqrt{x-y}})$

$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \neq y\}$
Como $-1 \leq cos(\theta) \leq 1$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, segue que f(x,y,z) é limitada.

f) $f(x,y,z) = \frac{xy}{x^2+y^2+z^4}$

$D_f = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

Para mostrar que $\frac{xy}{x^2+y^2+z^4}$ é limitada, inicialmente, devemos lembrar que $|x| = \sqrt{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e utilizar o mesmo raciocínio usado no item d.

$$|xy| = |x||y| = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^4}\sqrt{x^2+y^2+z^4} = x^2+y^2+z^4$$

Dessa forma, temos:

$$|xy| \leq x^2+y^2+z^4 \Rightarrow \frac{|xy|}{x^2+y^2+z^4} \leq \frac{x^2+y^2+z^4}{x^2+y^2+z^4} \Rightarrow \frac{|xy|}{x^2+y^2+z^4} \leq 1$$

Portanto:

$$-1 \leq \frac{xy}{x^2+y^2+z^4} \leq 1$$

Logo, f(x,y,z) é limitada em D_f.

g) $f(x,y) = \frac{x^8}{x^8+y^8}$

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Como $x^8 \geq 0$ e $x^8 + y^8 \geq x^8$, temos:

$$0 \leq \frac{x^8}{x^8+y^8} \leq \frac{x^8}{x^8} \Rightarrow \ 0 \leq \frac{x^8}{x^8+y^8} \leq 1$$

Portanto, f(x,y) é limitada em D_f.

h) $f(x,y) = \frac{x^4y^4}{x^8+y^8}$

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Como $x^4y^4 \geq 0$ e $x^8 + y^8 > 0$, temos que:

$$0 \leq \frac{x^4y^4}{x^8+y^8}$$

Agora basta encontrarmos a limitação superior. Temos duas situações:

I) Se $y^4 \leq x^4$:

$$y^4 \cdot x^4 \leq x^4 \cdot x^4 \Rightarrow x^4y^4 \leq x^8$$

Como $y^8 \geq 0$, $x^4y^4 \leq x^8 + y^8$. Dividindo tudo por $(x^8 + y^8)$, obtemos:

$$\frac{x^4y^4}{x^8+y^8} \leq \frac{x^8+y^8}{x^8+y^8} \Rightarrow \frac{x^4y^4}{x^8+y^8} \leq 1$$

II) Se $y^4 \geq x^4$:

$$y^4 \cdot x^4 \leq y^4 \cdot y^4 \Rightarrow x^4y^4 \leq y^8$$

Como $x^8 \geq 0$, $x^4y^4 \leq x^8 + y^8$. Dividindo tudo por $(x^8 + y^8)$, obtemos:

$$\frac{x^4y^4}{x^8+y^8} \leq \frac{x^8+y^8}{x^8+y^8} \Rightarrow \frac{x^4y^4}{x^8+y^8} \leq 1$$

Portanto, f(x,y) é limitada pois $(0 \leq f(x,y) \leq 1)$.

i) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^4}$

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Como $x^2 \leq x^2 + y^4$ e $x^2 \geq 0$, temos:

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^4} \leq \frac{x^2}{x^2} \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^4} \leq 1$$

Portanto, f(x,y) é limitada $(0 \leq f(x,y) \leq 1)$.

j) $f(x,y) = \frac{x^4}{x^2+y^4}$

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Perceba que f(x,y) é limitada inferiormente por zero (porque $x^4 \geq 0$), mas não é possível encontrar uma limitação superior para f(x,y). A função é sempre positiva e crescente para valores de $y << x$ graças ao expoente maior do numerador (x^4) em relação ao denominador de mesma base(x^2).

l) $f(x,y) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Como $y^2 \geq 0$, temos que $x^2 \leq y^2 + x^2$. Elevando os dois lados ao cubo temos:

$$x^6 \leq (x^2+y^2)^3$$

Tirando a raiz dos dois lados temos:

$$\sqrt{x^6} \leq \sqrt{(x^2+y^2)^3} \Rightarrow |x^3| \leq \sqrt{(x^2+y^2)^3} \Rightarrow -\sqrt{(x^2+y^2)^3} \leq x^3 \leq \sqrt{(x^2+y^2)^3}$$

Dividindo tudo por $\sqrt{(x^2+y^2)^3}$, temos:

$$-\frac{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \leq \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \leq \frac{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

Portanto, sendo $f(x,y) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, concluímos que $-1 \leq f(x,y) \leq 1$, isto é, f(x,y) é uma função limitada.

Questão 7

Observação: perceba que todas as funções são do tipo $f(x,y)$. Isso é a mesma coisa que colocarmos z em função de x e y, o que significa que todos os desenhos estarão no espaço tridimensional de eixos xyz. Em alguns casos é necessário se atentar ao domínio, à imagem e as curvas de nível para conseguir uma visualização melhor do gráfico de $f(x,y)$.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3$

De antemão, perceba que uma função do tipo $g(x,y) = x^2 + y^2$ representa um parabolóide de concavidade para cima. Comparando com a função f, temos que o gráfico de f(x,y) será um parabolóide transladado 3 unidades para cima. Para comprovar essa afirmação, vamos analisar a função e as curvas de nível.

I) Curvas de Nível

$$x^2 + y^2 - 3 = c \quad c \in \mathbb{R}$$
$$x^2 + y^2 = (c-3)$$

Como $x^2 + y^2 \geq 0$, não existe solução para $c < 3$, o que significa que no eixo z nossa função parte do plano z = 3 (não há função abaixo desse plano, pois isso significaria uma curva de nível com $c < 3$). Além disso, perceba que as curvas de nível representam circunferências de centro (0,0) no plano xy e de raio $\sqrt{c-3}$ e, portanto, quanto maior c, maior o raio (os raios crescem conforme subimos no eixo z).

II) Função

$$se\ x = 0 \Rightarrow z = y^2 + 3 = parábola\ no\ plano\ zy$$
$$se\ y = 0 \Rightarrow z = x^2 + 3 = parábola\ no\ plano\ xz$$

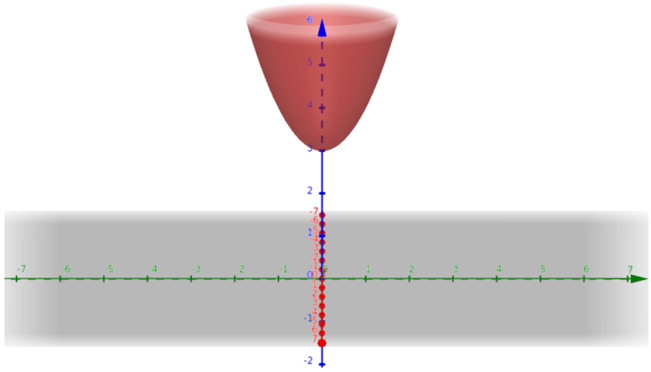

Figura 11: Gráfico

b) $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 3$

Comparando com a equação da letra a, temos que a figura será também um parabolóide transladado 3 unidades para cima, mas com o centro deslocado (não mais (0,0)).

I) Curvas de Nível

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + 3 = c \quad c \in \mathbb{R}$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = c - 3$$

Novamente, temos que $(x-1)^2 + (y-2)^2 \geq 0 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, as curvas de nível começarão em $c - 3 \geq 0$, isto é $c \geq 3$. Além disso, note que as curvas de nível são circunferências de centro (1,2) e raio $\sqrt{c-3}$. Os raios crescem se aumentamos c.

II) Função

$$se\ x = 0 \Rightarrow z = (y-2)^2 + 3 = parábola\ no\ plano\ zy$$
$$se\ y = 0 \Rightarrow z = (x-1)^2 + 3 = parábola\ no\ plano\ xz$$

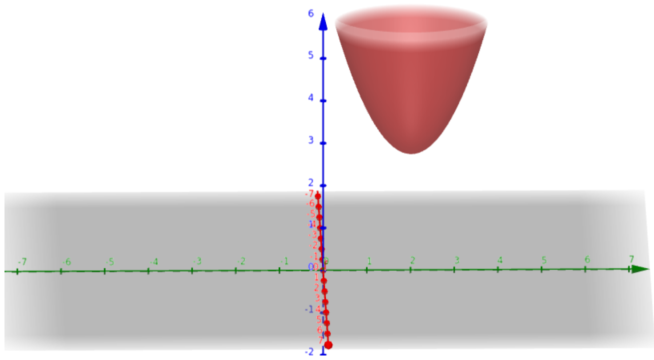

Figura 12: Gráfico

c) $f(x,y) = 3$

Trata-se do plano z = 3 (função constante para qualquer (x,y)).

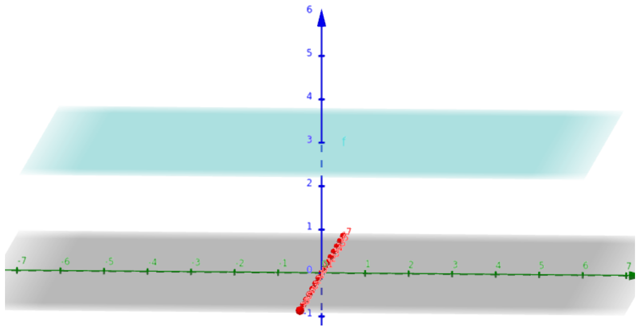

Figura 13: Gráfico

d) $f(x,y) = -x - 3y + 3$

Observe que como $f(x,y) = z$, temos $z = -x - 3y + 3$ é o plano $x + 3y + z - 3 = 0$. Esse plano tem como vetor normal o vetor (1,3,1) = coeficientes que multiplicam x, y e z respectivamente.

No plano xy (z = 0), temos:

$$0 = -x - 3y + 3 \Rightarrow x = -3y + 3$$

Logo, basta desenharmos uma reta do tipo $x = -3y+3$ no plano xy e "levantarmos"essa reta ao longo de z.

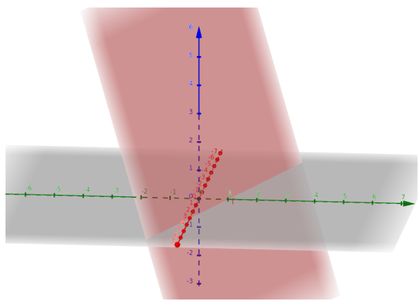

Figura 14: Gráfico

Perceba na figura 15 abaixo a reta x = -3y + 3 no plano z = 0.

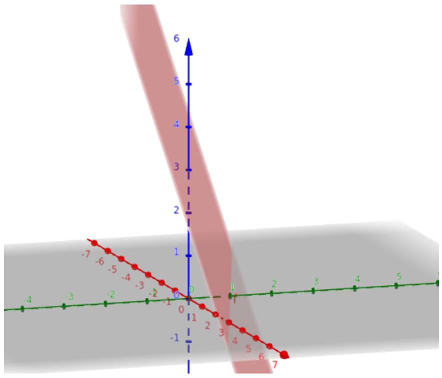

Figura 15: Gráfico

e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Esta é a equação típica de um cone. Vejamos o porquê:

I) Curvas de Nível

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c \quad c \in \mathbb{R}$$

Perceba que $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ e, portanto, só há solução para $c \geq 0$, o que significa que a função começa no plano z=c=0 (ponto (0,0,0)) segue para cima (valores positivos de z). Alem disso, elevando os dois lados ao quadrado temo $x^2 + y^2 = c^2$, que são circunferências de centro (0,0) e raio c.

II) Função

$$se\ x = 0 \Rightarrow z = \sqrt{y^2} = |y| \Rightarrow no\ plano\ zy\ temos\ as\ retas\ z = -y\ e\ z = y$$

$$se\ y = 0 \Rightarrow z = \sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow no\ plano\ zx\ temos\ as\ retas\ z = -x\ e\ z = x$$

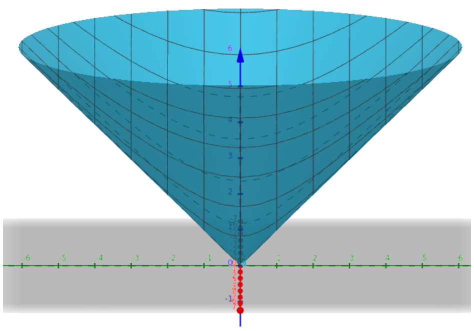

Figura 16: Gráfico

f) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$

Comparando com a equação da letra e), percebemos que será um cone transladado 1 unidade para cima (as curvas de nível serão iguais, mas começarão em $c \geq 1$).

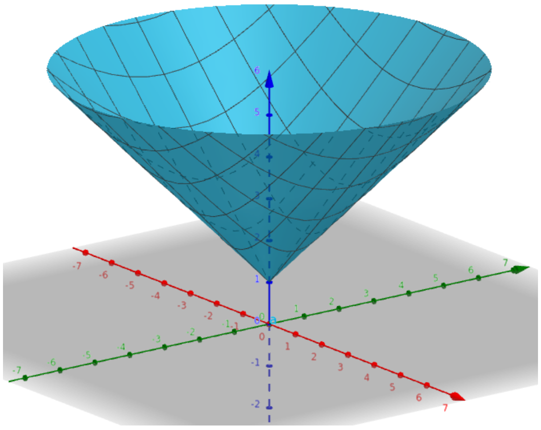

Figura 17: Gráfico

g) $f(x, y) = x + 2$

Perceba que a função que temos é $z = x + 2$, que é uma reta no plano xz. Não há dependência em relação a y (y é livre), então a reta $z = x + 2$ se estende para todo y (basta desenhar a reta $z = x + 2$ e prolongá-la na direção do eixo y). Perceba na figura 18 a reta z = x + 2.

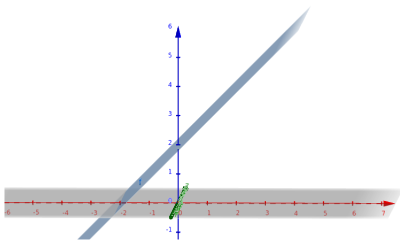

Figura 18: Gráfico

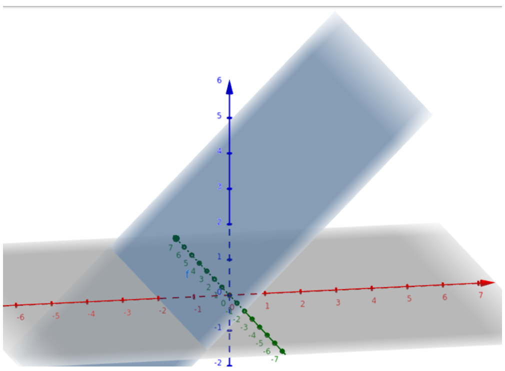

Figura 19: Gráfico

h) $f(x, y) = e^x + 2$

Novamente, temos uma dependência de z em relação a x, mas y está livre. Dessa forma, o desenho da nossa função será uma exponencial ($z = e^x + 2$) translada 2 unidades para cima em z e basta estender o desenho ao longo de toda a direção y.

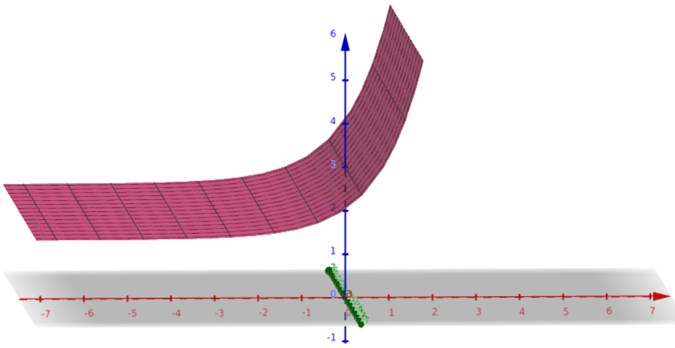

Figura 20: Gráfico

Questão 8

a) $f(x, y) = xy$

$$xy = c \quad , c \in \mathbb{R}$$

c = -1:

$$xy = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{x}$$

c = 0:

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0\,(eixo\ y) \quad ou \quad y = 0\,(eixo\ x)$$

c = 4:

$$xy = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$$

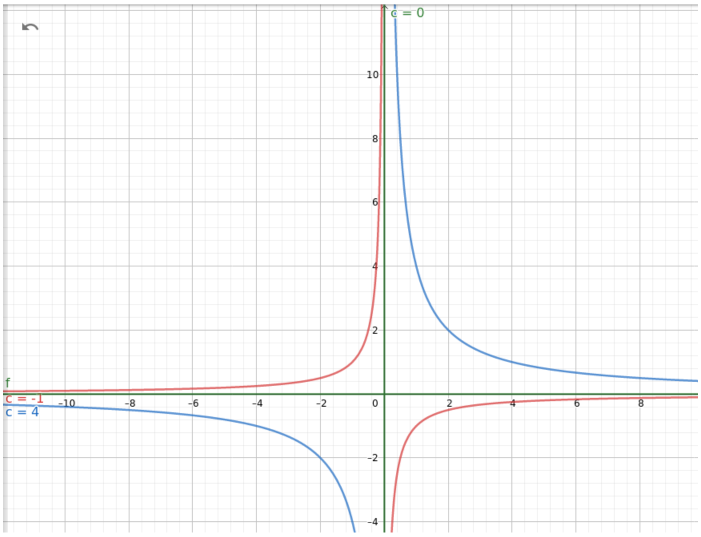

Figura 21: Curvas de nível. Em vermelho a curva para c = -1, em verde para c = 0 e em azul para c = 4.

b) $f(x, y) = ln(xy)$

$$ln(xy) = c \ \ , c \in \mathbb{R}$$

c = -1:

$$ln(xy) = -1 \Rightarrow xy = e^{-1} \Rightarrow xy = \frac{1}{e} \Rightarrow y = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{x}$$

c = 0:

$$ln(xy) = 0 \Rightarrow xy = e^{0} \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

c = 4:

$$ln(xy) = 4 \Rightarrow xy = e^{4} \Rightarrow y = \frac{e^4}{x} \Rightarrow y = e^4\frac{1}{x}$$

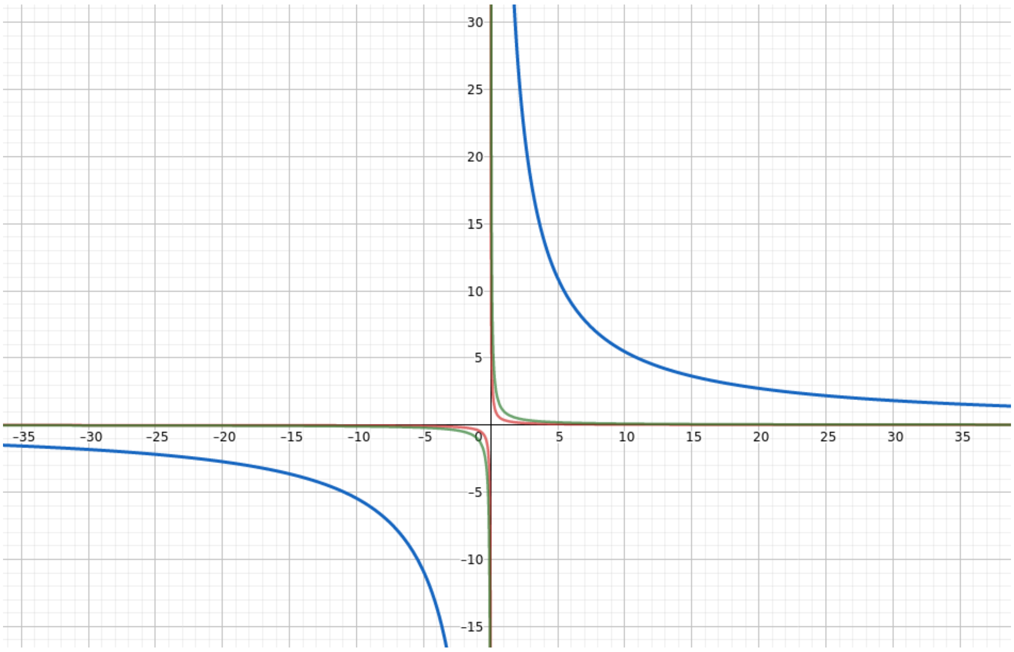

Figura 22: Curvas de nível. Em vermelho a curva para c = -1, em verde para c = 0 e em azul para c = 4.

c) $f(x, y) = 4 - (x-1)^2 - (y+3)^2$

$$4 - (x-1)^2 - (y+3)^2 = c \ \ , c \in \mathbb{R}$$

Reescrevendo:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4 - c$$

Esta equação representa circunferências de centro (1,-3) com raio igual a $\sqrt{4-c}$. Como $(x-1)^2 + (y+3)^2 \geq 0$, temos que $4 - c \geq 0$ e, portanto, $c \leq 4$. Agora vamos analisar acurva para o nível c dado.

c = -1:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4 - (-1) \Rightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5 \Rightarrow \ \ raio \ = \ \sqrt{5}$$

c = 0:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4 - 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4 \Rightarrow \ \ raio \ = \ \sqrt{4} = 2$$

c = 4:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4 - 4 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 0 \Rightarrow \ \ a\,\text{única}\,\text{solução}\,\text{é}\,o\,ponto\,(1, -3)$$

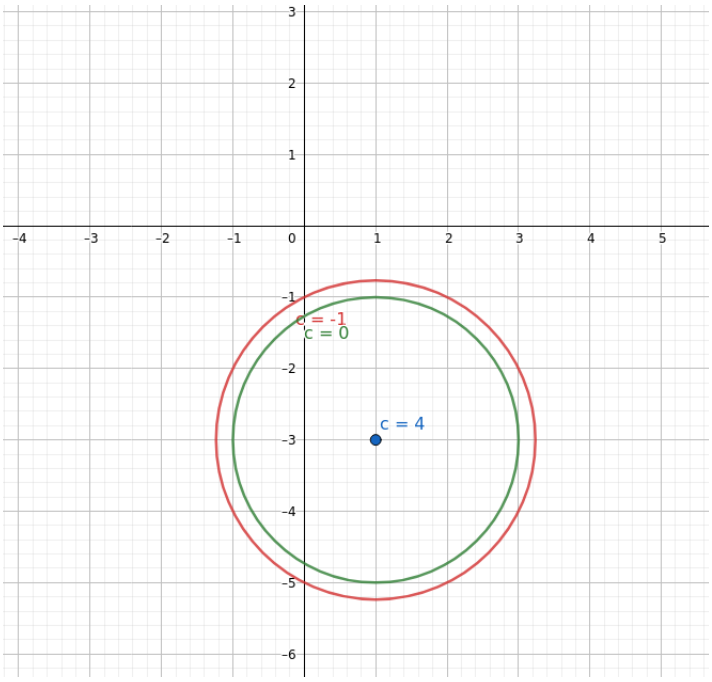

Figura 23: Curvas de nível. Em vermelho a curva para c = -1, em verde para c = 0 e em acul para c = 4.

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}$

$$\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}} = c \ \ , c \in \mathbb{R}$$

Como estamos no conjunto dos reais, temos que a raiz quadrada de um número sempre resulta em um número positivo. Com isso, temos uma condição imposta sobre c: $c \geq 0$, isso significa que não temos cruvas de nível cujo nível seja menor do que zero: o nosso gráfico de f começa em z = 0 (c = 0) e sobe para valores positivos.

c = -1:

Perceba que $c = -1 \leq 0$ viola a condição imposta sobre nossa constante c e, portanto, não temos curva de nível para $c = -1$.

c = 0:

$$\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}} = 0 \Rightarrow \ \ a\,única\,solução\,é\,o\,ponto\,(0,0)$$

c = 4:

$$\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}} = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{2} = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1$$

Essa equação representa uma elipse de semi-eixo maior y e semi-eixo menor x (faça x = 0 e depois y = 0 e veja em qual equação é obtido o maior e o menor valor).

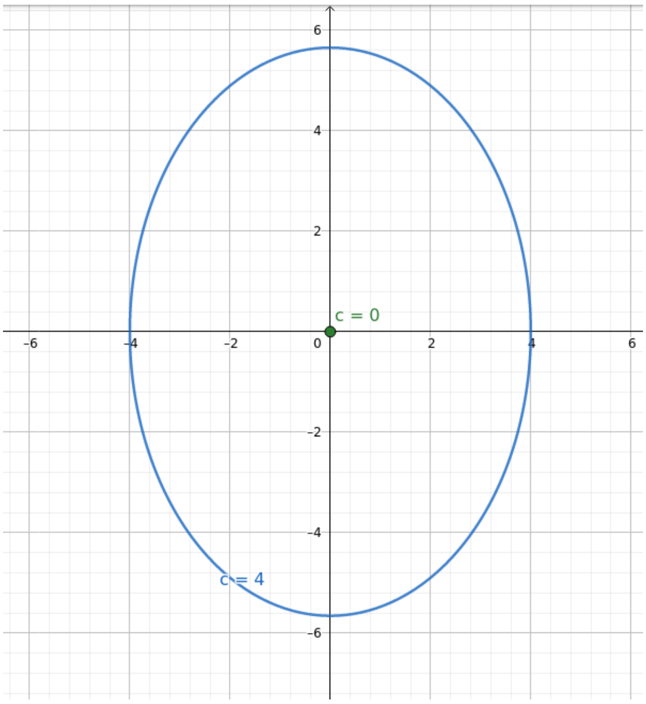

Figura 24: Curvas de nível. Perceba que não temos solução para c = -1. Em verde temos c = 0 e em azul temos a curva para c = 4.

e) $f(x,y) = \frac{e^x}{2y}$

$$\frac{e^x}{2y} = c \quad , c \in \mathbb{R}$$

c = -1:

$$\frac{e^x}{2y} = -1 \Rightarrow e^x = -2y \Rightarrow y = -\frac{e^x}{2}$$

c = 0:

$$\frac{e^x}{2y} = 0 \Rightarrow e^x = 0$$

Perceba que a equação $e^x = 0$ não tem solução para nenhum valor real de x. Isso significa que não temos uma curva de nível com nível c = 0 pertencendo ao gráfico da nossa função f(x,y).

c = 4:

$$\frac{e^x}{2y} = 4 \Rightarrow e^x = 8y \Rightarrow y = \frac{e^x}{8}$$

Perceba então que para c -1 e para c = 8 teremos uma função exponencial (y depende da exponencial de x).

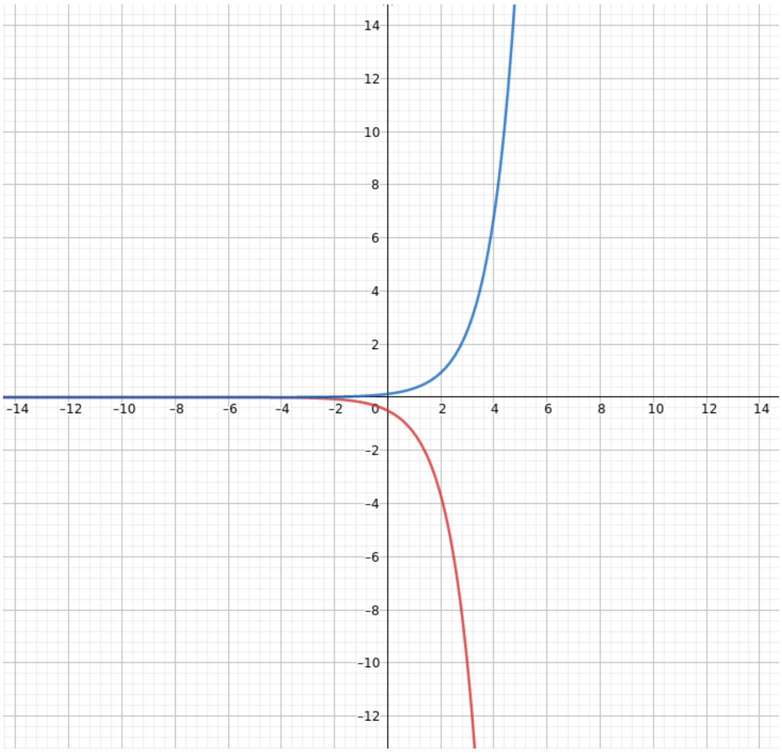

Figura 25: Curvas de nível. Perceba que não temos solução para c = 0. Em vermelho temos a curva em c = -1 e em azul temos a curva em c = 4.

Questão 9

Observação: a única diferença entre esse exercicício e o exercício 8 é que agora estamos trabalhando com funções de 3 variáveis e, portanto, teremos superfícies de nível (as "curvas de nível"são no espaço 3D).

a) $f(x, y, z) = \frac{e^x}{2y}$

Perceba que a expressão dessa função é igual à do item **e** do exercício anterior. Temos a relação de dependência de y em relação à exponencial de x e o nosso z está livre. Então basta estender o nosso desenho da fig 25 ao longo do eixo z.

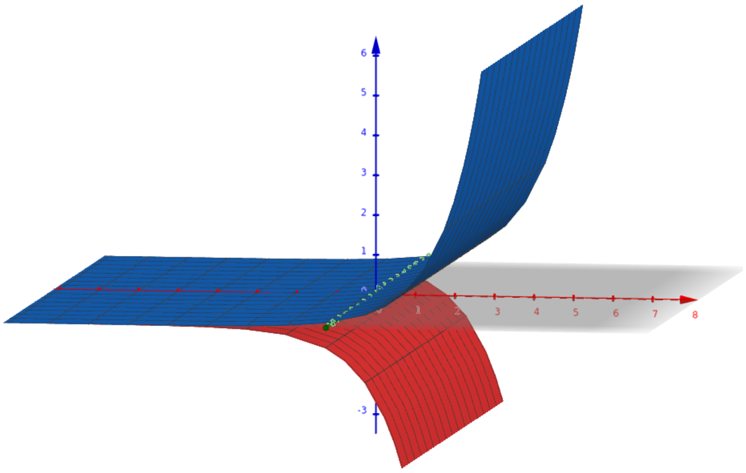

Figura 26: Superfície de nível. Em vermelho para c = -1 e em azul para c = 4. Note que o eixo perpendicular à tela é o eixo z.

b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c \quad , c \in \mathbb{R}$$

Perceba que $c \geq 0$, pois estamos no conjunto dos reais. Reescrevendo a equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2$$

Essa equação representa uma esfera de centro (0,0,0) e raio c.
c = -1:
O nível $c = -1$ viola a condição de existência das superfícies de nível (perceba que não faz sentido em falarmos de "raio negativo"). Logo, não há superfície de nível em $c = -1$.
c = 0:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow a\,única\,solução\,é\,o\,ponto\,(0, 0, 0)$$

c = 4:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4^2 \Rightarrow raio\ = 4$$

As superfícies de nível são esferas de centro na origem e raio crescente conforme aumentamos a constante c, partindo de c = 0.

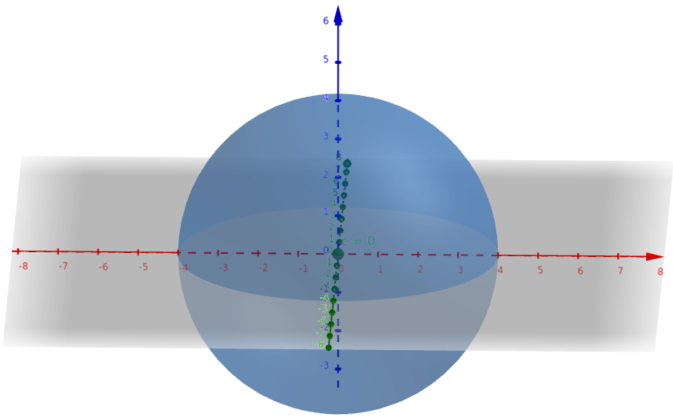

Figura 27: Superfícies de nível. Em verde c = 0 (ponto (0,0,0)), em azul c = 4.

Questão 10

a) $f(x,y) = y \cdot arctg(x)$, $P = (1,4)$

$$y \cdot arctg(x) = c$$

Substituindo o ponto P = (1,4) na equação:

$$4 \cdot arctg(1) = c \Rightarrow 4 \cdot \frac{\pi}{4} = c \Rightarrow c = \pi$$

Portanto, a equação do conjunto de nível é:

$$y \cdot arctg(x) = \pi$$

b) $f(x,y,z) = z^2y + x$, $P = (1, 4 - 2)$

$$z^2y + x = c \Rightarrow (-2)^2 \cdot 4 + 1 = c \Rightarrow c = 17$$

Portanto, a equação do conjunto de nível é:

$$z^2y + x = 17$$

c) $f(x,y) = \int_x^y \frac{dt}{1+t^2}$, $P = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Primeiramente precisamos encontrar a função f(x,y) dependendo de x e y explicitamente. Efetuando a integral e substituindo os limites de integração temos:

$$f(x,y) = [arctg(t)]_{t=x}^{t=y} = arctg(y) - artcg(x)$$

A curva de nível será então da forma:

$$arctg(y) - artcg(x) = c$$

Substituindo o ponto dado:

$$arctg(\sqrt{2}) - artcg(-\sqrt{2}) = c$$

Pelas propriedades da função arctg, temos que $arctg(-\sqrt{2}) = -arctg(\sqrt{2})$. Logo:

$$c = 2arctg(\sqrt{2})$$

A equação do conjunto de nível então será:

$$arctg(y) - artcg(x) = 2arctg(\sqrt{2})$$

Questão 11

a) Curva de nível : $y = 3x - 4$. Isolando o termo constante, temos:

$$y - 3x = -4$$

Portanto, se c = -4 constituir uma curva de nível, podemos tomar a função $f(x, y) = y-3x$ e então a equação $y-3x = -4$ (ou $y = 3x-4$) será uma curva de nível de f(x,y) na altura c = -4.

b) Curva de nível: $y = \frac{3}{x^2}$. Isolando o termo constante, temos:

$$y = \frac{3}{x^2} \Rightarrow yx^2 = 3$$

Logo, se c = 3 constituir uma curva de nível, podemos tomar $f(x, y) = yx^2$ e então $yx^2 = 3$ (ou $y = \frac{3}{x^2}$) será uma curva de nível de f(x,y) na altura c = 3.

Questão 12

a) $T(x, y) = xy$

c = 1:

$$T(x, y) = 1 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

c = 2:

$$T(x, y) = 2 \Rightarrow xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$$

c = 3:

$$T(x, y) = 3 \Rightarrow xy = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{x}$$

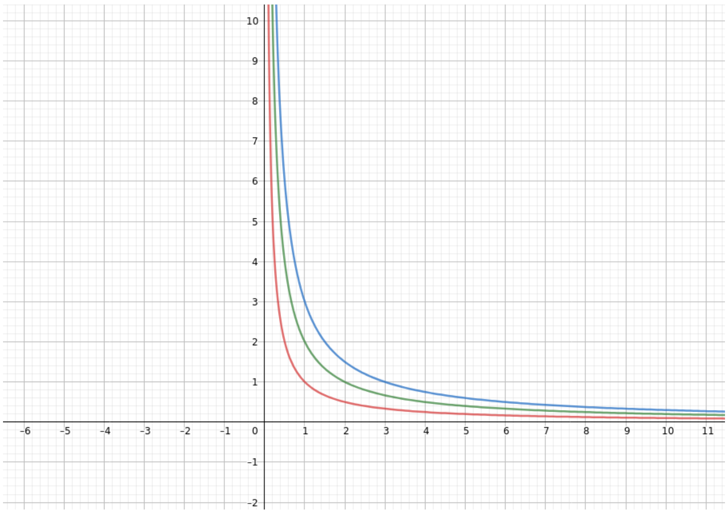

Figura 28: Curvas isotérmicas. Em vermelho para c = 1, em verde para c = 2 e em azul para c = 3.

b) Como um ponto está associado somente a uma curva de nível, devemos substituir o ponto na expressão para T(x,y) e encontrar o nível c. Assim, a trajetória será dada pela curva isotérmica de nível igual ao c encontrado.

$$T(x,y)xy \Rightarrow T(1,4) = 1 \cdot 4 = 4$$

$$xy = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$$

A trajetória é da forma $y = \frac{4}{x}$ e a temperatura correspondente é T = 4.

<u>Questão 13</u>

a) T(x,y) é inversamente proporcional à distância de (x,y) até a origem. A distância entre dois pontos (x, y) e (x_0, y_0) é dada por:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Neste caso, o ponto (x_0, y_0) é a origem (0,0), então temos:

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \Rightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Se T(x,y) é inversamente proporcional à distância d, a lei dessa função será da forma:

$$T(x,y) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ , k \in \mathbb{R} \ fixo$$

b)

$$\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c \Rightarrow c\sqrt{x^2 + y^2} = k \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{k}{c} \Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{k}{c}\right)^2$$

Portanto, as isotérmicas são circunferências de centro na origem e raio $\frac{k}{c}$, com $\frac{k}{c} > 0$.

c) Primeiramente precisamos encontrar a nossca constante fixa k:

$$T(4,3) = 40 \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{4^2+3^2}} = 40 \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{25}} = 40 \Rightarrow \frac{k}{5} = 40 \Rightarrow k = 200$$

Logo, a nossa função é dada então por:

$$T(x,y) = \frac{200}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Queremos a equação da curva de nível (isotérmica) para c = 20ºC, então teremos:

$$\frac{200}{\sqrt{x^2+y^2}} = 20 \Rightarrow 20\sqrt{x^2+y^2} = 200 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 10 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2 = 100}$$

Questão 14

Não, pois se duas curvas de nível se interceptassem isso significaria que um só ponto estaria associado a duas imagens diferentes e isso não pode ocorrer em uma função.

Questão 15

a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

Como a função f(x,y) é contínua no ponto (0,1), basta inserirmos os valores na expressão da função:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y^2}{x-y} = \frac{0^2+1^2}{0-1} = -1$$

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$$

Como a função f(x,y) é contínua no ponto (0,0), basta inserirmos os valores na expressão da função:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy} = \frac{0-2}{3-0\cdot 0} = -\frac{2}{3}$$

c)

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x^2+y^2-1}$$

Como a função f(x,y) é contínua no ponto (1,0), basta inserirmos os valores na expressão da função:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x^2+y^2-1} = \sqrt{1^2+0^2-1} = 0$$

d)

$$\lim_{(x,y,z)z\to(0,1,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y-z}$$

Como a função f(x,y,z) é contínua no ponto (0,1,0), basta inserirmos os valores na expressão da função:

$$\lim_{(x,y,z)z\to(0,1,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y-z} = \frac{0^2+1^2}{0-1-0} = -1$$

e)

$$\lim_{(x,y,z)\to(-1,1,2)} xz - xy - 2xzy$$

Como a função f(x,y,z) é contínua no ponto (-1,1,2), basta inserirmos os valores na expressão da função:

$$\lim_{(x,y,z)\to(-1,1,2)} xz - xy - 2xzy = (-1)\cdot 2 - (-1)\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 2\cdot 1 = 3$$

f)

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,4)} |\frac{x-y}{x+xy+y^2z}|$$

Como a função f(x,y,z) é contínua no ponto (1,-1,4), basta inserirmos os valores na expressão da função:

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,4)} |\frac{x-y}{x+xy+y^2z}| = |\frac{1-(-1)}{1+1\cdot(-1)+(-1)^2\cdot 4}| = |\frac{2}{4}| = \frac{1}{2}$$

Questão 16

a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x-y = 0-0 = 0$$

Manipulamos algebricamente a expressão da função até chegarmos em uma expressão contínua em (0,0), ponto no qual simplesmente inserirmos esse valor na expressão encontrada. Dessa forma, mostra-se que o limite é 0.

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^2+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y)(x^2-y)}{(x^2+y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y = 0^2+0 = 0$$

Decompomos o numerador da nossa fração no produto da soma pela diferença de dois termos e cancelamos um destes com o denominador, fazendo com que chegássemos em uma expressão contínua no ponto de desejo. Avaliando a expressão encontrada no ponto (0,0), concluímos que o valor do limite é 0.

c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x+y}-1}{x+y-1} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(\sqrt{x+y}-1)}{(\sqrt{x+y}-1)(\sqrt{x+y}+1)} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1}{\sqrt{x+y}+1}$$

Utilizando raciocínio semelhante ao dos itens anteriores, chegamos a uma expressão contínua no ponto. Portanto, basta avaliar a expressão no ponto e concluir o valor do limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1}{\sqrt{x+y}+1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2} \neq 2$$

Questão 17

Nessa questão precisamos verificar se é possível utilizar o Teorema do Confronto para os casos em que a função não seja contínua no ponto. Caso não seja possível avaliar a expressão da função como o produto de uma função limitada e uma que tende à zero (aplicação do Teorema do Confronto, resultando que o limite então será zero), deve-se tentar utilizar diferentes curvas, fazer a composta da função com a curva e calcular o limite dessa composta para $t \to t_0$.

a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Utilizando dois caminhos (curvas) diferentes para verificar que o limite não existe:

I) $\gamma_1(t) = (t, 0)$

Note que $\gamma_1(0) = (0, 0)$ e, portanto, $t_0 = 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{0}{\sqrt{t^2+0^2}} = 0$$

II) $\gamma_2(t) = (t, t)$

Note que $\gamma_2(0) = (0, 0)$ e, portanto, $t_0 = 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t^2+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{2}\sqrt{t^2}} = \sqrt{2} \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} = \pm\sqrt{2}$$

Segue que $\lim_{t\to t_0} f(\gamma_2(t))$ não existe (os limites laterais são diferentes) e, portanto, não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$$

Utilizando caminhos (curvas) para verificar que o limite não existe:

I) $\gamma_1(t) = (t, t^2)$

Note que $\gamma_1(0) = (0,0)$ e, portanto, $t_0 = 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t \cdot t^2}{|t \cdot t^2|} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{|t^3|} = \pm 1$$

Perceba que $\lim_{t\to t_0} f(\gamma_1(t))$ não existe (os limites laterais são diferentes) e, portanto, não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

c)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+5y}{x-y^2+z}$$

Utilizando dois caminhos (curvas) diferentes para verificar que o limite não existe:

I) $\gamma_1(t) = (t,t,t)$
Note que $\gamma_1(0) = (0,0,0)$ e, portanto, $t_0 = 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t+5t}{t-t^2+t} = \lim_{t\to 0} \frac{6t}{t(2-t)} = \lim_{t\to 0} \frac{6}{2-t} = \frac{6}{2} = 3$$

II) $\gamma_2(t) = (-5t, t, t)$
Note que $\gamma_2(0) = (0,0,0)$ e, portanto, $t_0 = 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{-5t+5t}{-5t-t^2+t} = 0$$

Como $\lim_{t\to t_0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t\to t_0} f(\gamma_2(t))$, segue que não existe $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$.

d)

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y-1}{\sqrt{x^2-2x+y^2-2y+2}} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$$

Utilizando uma curva para verificar que o limite não existe:

I) $\gamma(t) = (t,t)$

Note que $\gamma(1) = (1,1)$ e, portanto, $t_0 = 1$

$$\lim_{t\to 1} \frac{t-1}{\sqrt{(t-1)^2+(t-1)^2}} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)}{\sqrt{2(t-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)}{\sqrt{(t-1)^2}}$$

Mudança de variável:

$$t-1 = u \quad , t \to 1 \Rightarrow u \to 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)}{\sqrt{(t-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{u\to 0} \frac{u}{|u|}$$

Como sabemos, $\lim_{u\to 0}\frac{u}{|u|}$ não existe, pois os limites laterais são diferentes. Segue então que não existe $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.

e)

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{x^2-4x+4}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Perceba que $f(x,y)=\frac{x^2-2x+4}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é contínua em (2,0). Logo, basta inserir os valores no ponto na expressão da função:

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{x^2-4x+4}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2^2-4\cdot 2+4}{\sqrt{2^2+0^2}} = 0$$

Portanto, existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e ele vale 0.

f)

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{y-2}{\sqrt{x^2+(y-2)^4}}$$

Utilizando uma curva para verificar que o limite da função composta não existe:

I) $\gamma(t)=(0,t)$
Note que $\gamma(2)=(0,2)$ e, portanto, $t_0=2$

$$\lim_{t\to 2} \frac{t-2}{\sqrt{0^2+(t-2)^4}} = \lim_{t\to 2} \frac{t-2}{(t-2)^4} = \lim_{t\to 2} \frac{(t-2)}{(t-2)^2} = \lim_{t\to 2} \frac{1}{t-2} = \pm\infty$$

Como $\lim_{t\to t_0} f(\gamma(t))$ não existe (os limites laterais são diferentes), segue que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y)$.

Questão 18

a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}y$$

I) $y^2\geq 0$ e $x^2\geq 0$, logo, $0\leq x^2\leq x^2+y^2$. Dividindo todos os termos por (x^2+y^2), temos:

$$0\leq \frac{x^2}{x^2+y^2}\leq 1$$

Portanto, a fração $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada.

II) Como uma função do tipo $g(x,y)=y$ é contínua no ponto (0,0), temos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$

Pelo Teorema do Confronto, como f(x,y) é o produto de uma função limitada por uma que tende a zero, segue que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} y$$

I) $y^2 \geq 0$, logo, $x^2 \leq x^2 + y^2$. Extraindo a raiz dos dois lados e em seguida dividindo tudo por $(\sqrt{x^2+y^2})$, obtemos:

$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow -\sqrt{x^2+y^2} \leq x \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$$

Portanto, a fração $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é limitada.

II) Como já mostrado no item a, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$.

Portanto, como f(x,y) é o produto de uma função limitada por uma que tende a zero. Pelo Teorema do Confronto, segue que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Por caminhos/curvas:

I) $\gamma_1(t) = (t, 0)$
Note que $\gamma_1(0) = (0,0)$ e, portanto, $t_0 = 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2-0^2}{t^2+0^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1$$

II) $\gamma_2(t) = (t, t)$
Note que $\gamma_2(0) = (0,0)$ e, portanto, $t_0 = 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2-t^2}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{2t^2} = 0$$

Como $\lim_{t\to t_0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t\to t_0} f(\gamma_2(t))$, segue que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

d)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}$$

Utilizando dois caiminhos/curvas diferentes para verificar se o limite existe:

I) $\gamma_1(t) = (0, t, t)$

Note que $\gamma_1(0) = (0,0,0)$ e, portanto, $t_0 = 0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{0\cdot t}{0^2+t^2+t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{2t^2}=0$$

II) $\gamma_2(t)=(t,t,t)$

Note que $\gamma_2(0)=(0,0,0)$ e, portanto, $t_0=0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot t}{t^2+t^2+t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Como $\lim_{t\to t_0} f(\gamma_1(t))\neq \lim_{t\to t_0} f(\gamma_2(t))$, segue que não existe $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$.

e)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}z$$

I) Como mostrado no item d da questão 6, a função $\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}$ é limitada.

II) O que sobrou da nossa expressão de f(x,y,z) é uma função do tipo g(x,y,z) = z. Temos que essa função é contínua para $(x,y,z)\to(0,0,0)$, isto é:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} z=0$$

Pelo Teorema do Confronto, segue que $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=0$.

f)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{4x-y-3z}{2x-5y+2z}$$

Por caminhos/curvas:

I) $\gamma_1(t)=(t,0,t)$

Note que $\gamma_1(0)=(0,0,0)$ e, portanto, $t_0=0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{4t-0-3t}{2t-5\cdot 0+2t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{4t}=\frac{1}{4}$$

II) $\gamma_2(t)=(t,t,0)$

Note que $\gamma_2(0)=(0,0,0)$ e, portanto, $t_0=0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{4t-t-3\cdot 0}{2t-5t+2\cdot 0}=\lim_{t\to 0}\frac{3t}{-3t}=-1$$

Como $\lim_{t\to t_0} f(\gamma_1(t))\neq \lim_{t\to t_0} f(\gamma_2(t))$, segue que não existe $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$.

g)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} sen(x)sen\left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

I) Perceba que a função seno é limitada entre -1 e 1 independentemente de seu argumento. Logo, temos que $sen\left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right)$ é limitada.

II) Uma função do tipo g(x,y,z) = sen(x) é contínua no ponto (0,0,0) e, portanto, temos que:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} sen(x) = sen(0) = 0$$

Pelo Teorema do Confronto, segue que $lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z) = 0$.

h)

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,1,2)} \frac{x}{x-y}$$

Por caminhos/curvas:

I) $\gamma(t) = (1, t, 2t)$

Note que $\gamma(1) = (1, 1, 2)$ e, portanto, $t_0 = 1$

$$\lim_{t\to1} \frac{1}{1-t} = \pm\infty$$

Como o $\lim_{t\to1} \frac{1}{1-t}$ é diferente para cada limite lateral tomado, segue que não existe $\lim_{t\to1} \frac{1}{1-t}$ e, portanto, não existe $\lim_{(x,y,z)\to(1,1,2)} f(x,y,z)$.

i)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 sen(x^2+y^3)}{x^4+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^4} sen(x^2+y^3)$$

I) $x^4 \geq 0$ e $y^4 \geq 0$, portanto: $0 \leq^4 \leq x^4 + y^4$. Dividindo tudo por $(x^4 + y^4)$:

$$0 \leq \frac{x^4}{x^4+y^4} \leq 1$$

Portanto, $\frac{x^4}{x^4+y^4}$ é limitada.

II) Uma função do tipo $g(x,y) = sen(x^2 + y^3)$ é contínua no ponto (0,0) e, portanto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} sen(x^2+y^3) = sen(0^2+0^3) = sen(0) = 0$$

Pelo Teorema do Confronto, temos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

j)

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{x-1}{(x-1)^2+|y|+|z|}$$

Por caminhos/curvas:

I) $\gamma(t) = (t, 0, 0)$

Note que $\gamma(1) = (1, 0, 0)$ e, portanto $t_0 = 1$.

$$\lim_{t\to 1} \frac{t-1}{(t-1)^2 + |0| + |0|} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)}{(t-1)^2} = \lim_{t\to 1} \frac{1}{t-1} = \pm\infty$$

Como os limites laterais são diferentes, segue que não existe $lim_{t\to t_0} f(\gamma(t))$ e, logo, não existe $\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} f(x, y, z)$.

k)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

Por caminhos/curvas:

I) $\gamma(t) = (t, 0)$

Note que $\gamma(0) = (0, 0)$ e, portanto, $t_0 = 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3}{\sqrt{t^2+0^2}^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{\sqrt{t^2}^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{|t^3|} = \pm 1$$

Como já visto em outros itens, esse limite não existe, pois os limites laterais são diferentes. Como não existe $\lim_{t\to t_0} f(\gamma(t))$, segue que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

l)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} y^2$$

I) Note que $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$. Partindo dessas inequações e escrevendo $\sqrt{(x^2+y^2)^3}$ como $(x^2+y^2)^{3/2}$ podemos construir as seguintes desigualdades:

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 \leq (x^2+y^2)^{3/2} \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq \sqrt{(x^2+y^2)^3}$$

Dividindo tudo por $\sqrt{(x^2+y^2)^3}$, obtemos:

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \leq \frac{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \leq 1$$

Portanto, mostramos que $\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ é limitada.
II) Uma função do tipo $g(x, y) = y^2$ é contínua no ponto (0,0), o que significa:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$$

Pelo Teorema do Confronto, segue que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

Questão 19

a) $f(x,y) = ln(x + y - 1)$

Sabendo que a exponencial de um número só admite soluções extritamente positivas, temos que $x + y - 1 > 0$, ou seja, $y > 1 - x$.

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y - 1 > 0\}$$

A função f(x,y) é contínua em D_f. O esboço de D_f compreende toda a região de pontos "acima"da reta y = 1 - x.

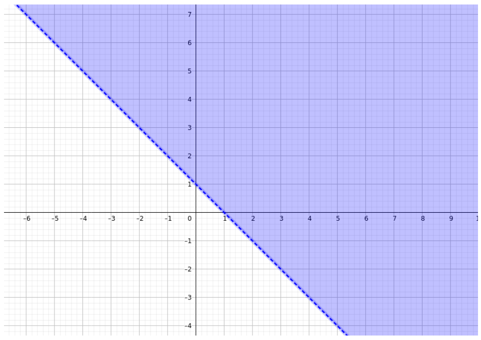

Figura 29: Esboço do domínio da fução.

b) $f(x,y) = \sqrt{x}e^{xy}$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0\}$$

Sendo assim, f(x,y) é contínua em D_f. O esboço do domínio de f(x,y) é o conjunto dos quadrantes em que $x > 0$ e o eixo y.

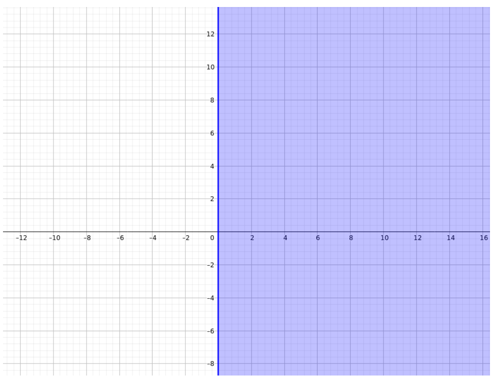

Figura 30: Esboço do domínio da função.

c) $f(x,y) = sen(\sqrt{1-x^2+y^2})$

$$\sqrt{1-x^2+y^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2+y^2 \geq 0$$
$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1-x^2+y^2 \geq 0\}$$

A função $f(x,y)$ é contínua em D_f. Rearranjando a equação de D_f, temos:

$$x^2 - y^2 \leq 1$$

A equação $x^2 - y^2 = 1$ é a equação de uma hipérbole que corta o eixo x em $x = -1$ e $x = 1$. Logo, D_f é o conjunto de todos os pontos entre as duas curvas que representam as hipérboles.

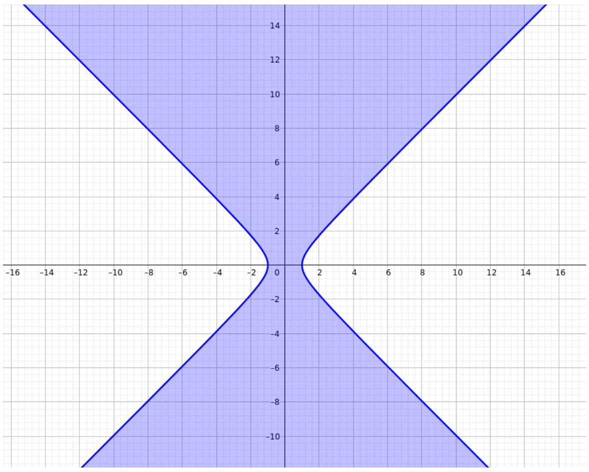

Figura 31: Esboço do domínio da função.

d) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

$$x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$$

Perceba que $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ apenas se $x = y = z = 0$. Logo, o domínio de f(x,y,z) é todo o espaço tridimensional exceto a origem (0,0,0) e a função é contínua em D_f.

$$D_f = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$$

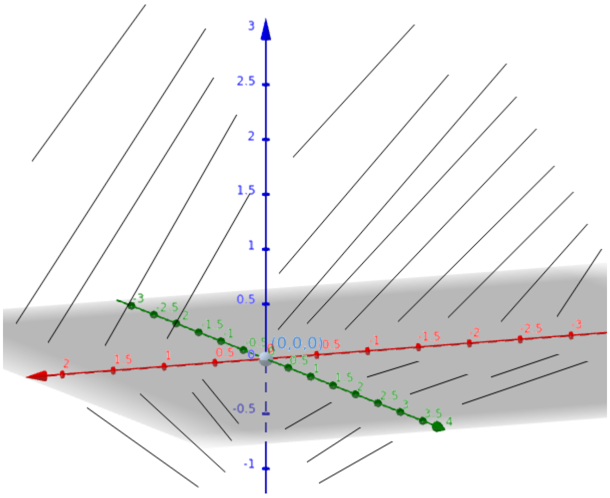

Figura 32: Esboço do domínio da função.

e) $f(x, y, z) = \frac{1}{x+y+z}$

$$x + y + z \neq 0 \Rightarrow z \neq -x - y$$

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \neq -x - y\}$$

A função é contínua em D_f então é todo o espaço 3D diferente do plano $z = -x - y$.

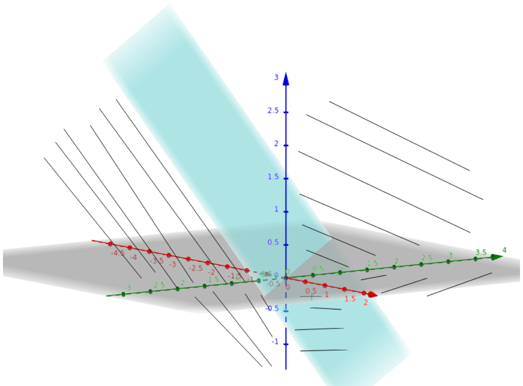

Figura 33: Esboço do gráfico da função. Rasurado em preto, temos a região do domínio, enquanto que o plano azul não faz parte dele.

f) $f(x, y) = tan(xyz)$

A função tangente diverge para valores de argumento de $\frac{\pi}{2}$ e seus múltiplos. Logo, temos a seguinte expressão para o domínio de f(x,y).

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xyz \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \ \ k \in \mathbb{Z}$$

Reescrevendo a equação para D_f e plotando para k = 0, temos:

$$z \neq \frac{\pi}{2} \frac{1}{xy}$$

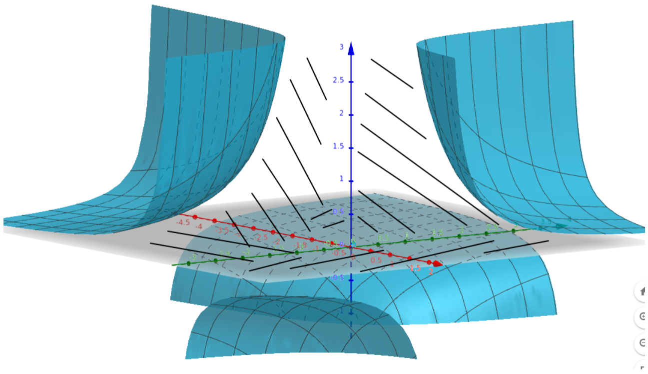

Figura 34: Esboço do domínio da função. Rasurado em preto temos a região do domínio. As curvas em azul são justamente valores que não fazem parte de D_f.

Questão 20

Observação: para verificarmos a continuidade das funções no ponto, devemos calcular o limite da função naquele ponto e avaliar se esse limite é o valor da função no ponto. Caso o limite não coincida com o valor da função no ponto ou não exista, a função não será contínua no ponto.

a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

Analisando cada uma das frações, temos:

I)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}x$$

Como mostrado no item a) da questão 18, a fração $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada entre 0 e 1. Além disso, como a função x é contínua no ponto (0,0), temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$$

Pelo Teorema do Confronto, segue que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$.

II) Para a fração $\frac{y^3}{x^2+y^2}$, empregando raciocínio idêntico ao utilizado para a fração $\frac{x^3}{x^2+y^2}$, conseguimos mostrar que $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ é limitada entre 0 e 1, e que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$. Logo, pelo Teorema do Confronto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0$.

Por fim, aplicamos a soma dos limites e obtemos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0+0 = 0 = f(0,0)$$

Como o valor do limite coincide com a função calculada no ponto, segue que f(x,y) é contínua em (0,0).

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Por caminhos/curvas:

$\gamma(t) = (t, t)$

Note que $\gamma(0) = (0, 0)$ e, portanto, $t_0 = 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

Para que $f(x, y)$ fosse contínua no ponto (0,0), deveríamos ter que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$, independentemente do caminho γ escolhido. Como $\lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)) \neq 0$, já podemos afirmar que $f(x, y)$ não é contínua no ponto (0,0).

c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$$

Por caminhos/curvas:

$\gamma(t) = (t, t)$

Note que $\gamma(0) = (0, 0)$ e, portanto, $t_0 = 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t^3}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}$$

Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, como $\lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)) \neq f(0, 0)$, pois $f(0, 0) = 0$, segue que $f(x, y)$ não é contínua no ponto (0,0).

d)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y sen(xy)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} sen(xy)$$

I) Como sabemos, a função seno é sempre limitada independentemente de seu argumento. Logo, temos:

$$-1 \leq sen(xy) \leq 1$$

E, portanto, temos que $sen(xy)$ é limitada.

Para utilizarmos o Teorema do Confronto, precisamos mostrar que o termo multiplicando $sen(xy)$ tem limite igual a zero.

II) Como sabemos do item l da questão 18, a fração $\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ é limitada. Temos também que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$, pois uma função do tipo $g(x, y) = y$ é contínua no ponto (0,0). Sendo assim, pelo Teorema do Confronto, temos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = 0$$

Como a nossa função original $f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} sen(xy)$ é o produto de uma função limitada por uma que tende a zero, utilizamos o Teorema do Confronto para concluir finalmente que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

e)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Perceba que qualquer curva γ escolhida para compor com nossa função f e avaliar o limite quando $t \to t_0$ recairá no limite fundamental do tipo $\lim_{n\to 0} \frac{sen(n)}{n} = 1$ para qualquer argumento do seno. Logo, temos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 = f(0,0)$$

Portanto, $f(x, y)$ é contínua em (0,0).

f)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}$$

Por caminhos:

$\gamma(t) = (t, 0)$

Note que $\gamma(0) = (0, 0)$ e, portanto, $t_0 = 0$. Assim, temos o seguinte limite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{sen(\sqrt{t^2+0^2})}{t^2+0^2} = \lim_{t\to 0} \frac{sen(\sqrt{t^2})}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{sen(|t|)}{t^2} = \frac{"0"}{0}$$

Como temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, podemos aplicar L'Hôpital e derivar o numerador e o denominador:

$$\lim_{t\to 0} \frac{sen(|t|)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{tcos(|t|)}{|t|}}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{tcos(|t|)}{|t| \cdot 2t} = \lim_{t\to 0} \frac{cos(|t|)}{2|t|} = \infty$$

Como $\lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)) \neq f(0, 0)$, segue que $f(x, y)$ não é contínua em (0,0).