

FÍSICA IV — AULA DE 21 DE SETEMBRO

EQUAÇÕES DE MAXWELL E RADIAÇÃO ELETROMAG- NÉTICA

Antes de Maxwell

Nas últimas décadas do Século XVIII e nas primeiras do Século XIX, as descobertas de Coulomb, Ørsted, Ampère e Faraday firmaram o eletromagnetismo como ciência. Em notação matemática moderna, o conhecimento fundamental acumulado nesse período pode ser resumido por quatro equações diferenciais: a equação de Poisson

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

a lei de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

a lei de Gauss para o magnetismo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

e a lei de Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}. \quad (4)$$

Na Eq. (1), ρ é a densidade de carga elétrica e

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad (5)$$

e, na Eq. (4), \vec{j} é a densidade de corrente elétrica. A densidade de corrente e a densidade de carga são ligadas pela equação da continuidade,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (6)$$

O vetor de deslocamento \vec{D} e o campo elétrico \vec{E} se relacionam pela igualdade

$$\vec{D} = \kappa \vec{E}, \quad (7)$$

onde κ é a constante dielétrica, que depende do material onde se medem os campos. No vácuo, $\kappa = 1$.

Analogamente, os campos \vec{H} e \vec{B} se relacionam pela igualdade

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (8)$$

onde a permeabilidade magnética μ também depende do material. A permeabilidade do vácuo é

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}. \quad (9)$$

Na década de 1860, o escocês James Clerk Maxwell, com base em análise teórica, concluiu que a Eq. (4) era incompatível com a equação da continuidade. Era necessária, portanto, uma correção.

A correção de Maxwell

Para ver que a Eq. (4) está em conflito com a equação da continuidade, precisamos apenas tomar o divergente nos dois lados da igualdade:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}. \quad (10)$$

Uma vez que o divergente do rotacional de qualquer vetor é sempre zero, a Eq. (10) indica que $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, em conflito com a Eq. (6). Nas experiências de Ørsted e Ampère, feitas em circuitos de corrente contínua, sem acúmulo de carga, o conflito não se tornara aparente. Como veremos mais adiante, porém, a incompatibilidade salta aos olhos em circuitos com capacitores que se carregam ou descarregam.

Para compatibilizar a lei de Ampère com a equação da continuidade, o mais simples é somar ao lado direito da Eq. (4) uma correção \vec{X} , que deve ser escolhida de forma que a divergência do lado direito seja zero. Em símbolos, escrevemos a expressão

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \vec{X} \quad (11)$$

e exigimos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \vec{X} = 0. \quad (12)$$

A Eq. (6), da continuidade, nos diz que o primeiro termo à direita na Eq. (12) é igual a $-\partial\rho/\partial t$. Podemos, assim, reescrever esta última equação na forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{X} = \frac{\partial\rho}{\partial t}. \quad (13)$$

A Eq. (1), de Poisson, mostra que a densidade ρ é proporcional à divergência do campo de deslocamento \vec{D} . Com isso, a Eq. (13) pode ser reescrita como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{X} = \epsilon_0 \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{D})}{\partial t}, \quad (14)$$

ou ainda

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{X} = \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right). \quad (15)$$

Podemos assim ver que a definição

$$\vec{X} \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (16)$$

garante que a igualdade (12) seja satisfeita, ou seja, torna a lei de Ampère corrigida, Eq. (11), compatível com a equação da continuidade.

A partir de hoje, portanto, no lugar da Eq. (4), passaremos a trabalhar com a lei de Ampère corrigida:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (17)$$

O segundo termo no lado direito da Eq. (17), identificado pela primeira vez por Maxwell, em 1861, é conhecido como *densidade de corrente de deslocamento*. A corrente de deslocamento se anula nos pontos em que o campo de deslocamento (ou o campo elétrico) é constante. Quando o campo varia com o tempo, porém, ele contribui para o campo magnético em pé de igualdade com a corrente gerada pelo movimento dos portadores. Vejamos um exemplo.

Corrente no interior de um capacitor

No circuito da figura 1, a força eletromotriz é $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$, onde $\mathcal{E}_0 = 1 \text{ V}$ e $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Como o resistor, o indutor e o capacitor estão dispostos em série, a impedância é a soma $Z = R + i\omega L - 1/(i\omega C)$. Com $\omega = 10$, as impedâncias do capacitor e do indutor se cancelam. Resulta que $Z = 20 \Omega$, e a corrente complexa é

$$u = \frac{\exp(10it)}{20}. \quad (18)$$

A corrente real $I = \text{Re } u$ é, portanto,

$$I = \frac{1}{20} \cos(10t). \quad (19)$$

A partir da Eq. (18), podemos encontrar a carga complexa z no capacitor. A equação equivalente a $I = dQ/dt$ no plano complexo é $u = dz/dt$, ou seja $u = 10iz$, visto que tanto u como z são proporcionais a $\exp(10it)$.

Assim, da Eq. (18) podemos extrair a carga complexa no capacitor:

$$z = \frac{\exp(10it)}{200i} \quad (20)$$

e, em seguida, calcular a carga real $Q = \text{Re } z$:

$$Q = \frac{1}{200} \text{sen}(10t). \quad (21)$$

A corrente I descreve o transporte de carga através do indutor, do resistor e do gerador de tensão. No interior do capacitor, entretanto, inexistente transporte. Como pode a corrente desaparecer numa placa do capacitor e reaparecer na outra?

Podemos responder intuitivamente a essa pergunta. A corrente é alternada. Nos instantes em que circula no sentido horário, a corrente carrega a placa da esquerda do capacitor. O acúmulo de carga

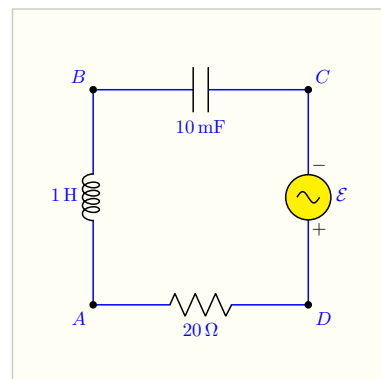


Figura 1: Circuito sujeito a tensão alternada $\mathcal{E} = \cos(10t)$, em Volts. A variação do campo \vec{D} gera uma corrente de deslocamento entre as placas do capacitor.

na placa esquerda gera um campo elétrico no interior do capacitor. O campo elétrico carrega negativamente a placa direita; para que isso possa acontecer, é necessário que haja transporte de carga da placa direita para o gerador. Dessa forma, o campo elétrico gerado no interior do capacitor permite que a corrente salte da placa da esquerda para a placa da direita sem passar pelo espaço vazio ou preenchido com material isolante no interior do capacitor.

Essa noção intuitiva é descrita matematicamente pela corrente de deslocamento. Assim como a corrente I através de uma superfície é o fluxo da densidade de corrente \vec{j} através da superfície, a corrente de deslocamento I_d é o fluxo da densidade de corrente de deslocamento $\vec{j}_d = \epsilon_0 \partial D / \partial t$ através da superfície. Se a área das placas do capacitor for A , a corrente de deslocamento através do dispositivo será

$$I_d = \epsilon_0 \frac{dD}{dt} A. \quad (22)$$

No lado direito, a derivada é ordinária, e não parcial, porque o vetor deslocamento depende apenas do tempo.

O campo \vec{D} é produzido pelas cargas Q , na placa esquerda, e $-Q$, na placa direita, do capacitor. Nos capacitores, a separação entre as placas é muito menor do que as dimensões das placas. Nessa geometria, é boa aproximação calcular o campo como se fosse produzido por planos infinitos com densidade superficial de carga $\sigma = Q/A$. A eletrostática nos diz, então, que o módulo do campo é

$$D = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0}. \quad (23)$$

Substituído esse resultado no lugar de D no lado direito da Eq. (22), a área e ϵ_0 se cancelam, e encontramos a corrente de deslocamento

$$I_d = \frac{dQ}{dt}, \quad (24)$$

ou, com a carga dada pela Eq. (21),

$$I_d = \frac{1}{20} \cos(10t). \quad (25)$$

Compare agora os lados direitos das Eqs. (19) e (25). A corrente de deslocamento I_d , através do capacitor, é igual ao fluxo de carga I , através dos demais elementos do circuito.

Campo magnético devido a corrente de deslocamento

O resultado que acabamos de encontrar, na Seção *Corrente no interior de um capacitor*, é bem satisfatório. Pode dar a impressão de que a corrente de deslocamento é um artifício matemático especialmente projetado para descrever o salto do fluxo de carga entre uma placa e outra

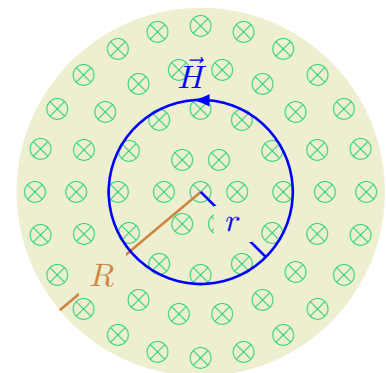


Figura 2: Interior de um capacitor com placas planas circulares de raio R , visto ao longo do eixo do capacitor. Os símbolos \otimes indicam a densidade de corrente de deslocamento. A circunferência azul mostra uma das linhas do campo magnético \vec{H} gerado pela corrente de deslocamento.

do capacitor, mas essa interpretação é incorreta. Para mostrar que a corrente de deslocamento tem realidade física, mostraremos nesta seção que ela gera um campo magnético no interior do capacitor.

Para facilitar, suporemos que o capacitor no circuito da figura 1 é circular, constituído por duas placas planas redondas, de raio R . A figura 2 mostra uma das placas, vista de um ponto entre as duas placas posicionado sobre o eixo do capacitor. Supomos que, no instante considerado, o vetor deslocamento \vec{D} , paralelo ao eixo, aponta para fora da figura e seu módulo é crescente. Nessas condições, a densidade de corrente de deslocamento tem a direção e o sentido do campo, como indicado pelos símbolos \otimes na figura.

A simetria exige que as linhas de campo magnético sejam circulares, centradas no eixo do capacitor, como ilustrado pela circunferência azul na figura. Queremos calcular o campo \vec{H} ao longo dessa linha de campo.

Também por simetria, o campo deve ser uniforme ao longo da linha. É fácil, por isso, calcular a integral de linha de \vec{H} ao redor da circunferência:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r H. \quad (26)$$

De acordo com o teorema de Stokes, a integral no lado esquerdo da Eq. (26) é igual ao fluxo do rotacional de \vec{H} através do círculo C delimitado pela circunferência na figura:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_C \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \hat{n} \, dS. \quad (27)$$

O rotacional de \vec{H} é dado pela Eq. (17). Como não há condução dentro do capacitor, o primeiro termo à direita é zero. E, como \hat{n} é paralelo ao eixo, que por sua vez é paralelo a \vec{D} , a Eq. (27) assume a forma

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \epsilon_0 \int_C \frac{dD}{dt} \, dS. \quad (28)$$

O campo \vec{D} é uniforme no interior do capacitor. Seu módulo é dado pela Eq. (23). Podemos fatorá-lo da integral no lado direito da Eq. (28), e resulta que

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} \int_C dS. \quad (29)$$

A integral restante, no lado direito da Eq. (29) é a área do círculo dentro da linha de campo, isto é,

$$\int_C dS = \pi r^2. \quad (30)$$

Temos, portanto, que

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\pi r^2}{A} \frac{dQ}{dt}. \quad (31)$$

A integral de linha no lado esquerdo é também dada pela Eq. (26). A comparação com a Eq. (31) mostra, portanto, que

$$2\pi rH = \frac{\pi r^2}{A} \frac{dQ}{dt}, \quad (32)$$

ou seja

$$H = \frac{r}{2A} \frac{dQ}{dt}. \quad (33)$$

Podemos, por fim, substituir a expressão (21) no lugar de Q , no lado direito, e efetuar a derivada. Notando que a área das placas é $A = \pi R^2$, chegamos ao resultado

$$H = \frac{r}{40\pi R^2} \cos(10t), \quad (34)$$

que também pode ser escrito na forma

$$H = \frac{r}{2\pi R^2} I, \quad (35)$$

onde I é a corrente na Eq. (19).

A Eq. (35) vale dentro do capacitor, isto é, para $r \leq R$. Podemos ver que o campo magnético no eixo ($r = 0$) é zero. À medida que nos afastamos do eixo, o campo magnético cresce linearmente com r até $r = R$. Esse comportamento é idêntico ao do campo magnético num fio de raio R que transporta uma densidade uniforme de corrente $j = I/\pi R^2$. A física da corrente de deslocamento é idêntica à do fluxo de carga.

Vejamos agora a região externa, com $r > R$. Nesse caso, a área $\int_C dS$ no lado direito da Eq. (29) é $A = \pi R^2$, visto que somente existe corrente de deslocamento no interior do capacitor, isto é, no círculo de raio R da figura.

Assim, os fatores $1/A$ e $\int_C dS$ no lado direito da Eq. (29) se cancelam e a igualdade assume a forma

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{dQ}{dt}. \quad (36)$$

Já vimos, na Eq. (26), que a integral à esquerda na Eq. (36) vale $2\pi rH$. E também sabemos que a derivada no lado direito é igual à corrente I . Podemos concluir que

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (r \geq R). \quad (37)$$

Essa igualdade coincide com a expressão para o campo magnético devido a um fio que conduz corrente I . Outra vez, vemos que a corrente de deslocamento no interior de um capacitor produz o mesmo efeito que o fluxo de carga num fio.

A Eq. (37) é também muito satisfatória por outra razão. Se andarmos à roda do circuito da figura 1, tomando o cuidado de ficar a uma distância r do fio condutor, sentiremos sempre o campo H dado por aquela expressão. Se não houvesse corrente de deslocamento, esse campo desapareceria subitamente perto da placa da esquerda do capacitor e reapareceria, também subitamente, perto da placa direita. Fisicamente, essas súbitas descontinuidades seriam difíceis de aceitar.

A equação de onda

O conjunto formado pelas Eqs. (1), (2), (3) e (17) é conhecido como *Equações de Maxwell*. Esse conjunto admite soluções ondulatórias, como o próprio escocês demonstrou e como veremos a seguir. Ficará evidente que o segundo termo à direita na Eq. (17), que define a densidade de corrente de deslocamento, tem importância capital na dedução.

Para mostrar que a solução ondulatória prevalece mesmo no vácuo, vamos começar com a suposição de que $\vec{D} = \vec{E}$ e $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Imporemos, adicionalmente, que tanto ρ como \vec{j} são iguais a zero. Com isso, as equações de Maxwell assumem a forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (38)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (39)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (40)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (41)$$

Como vemos, sem os termos proporcionais a ρ e \vec{j} as equações são simétricas. Podemos esperar que \vec{B} e \vec{E} tenham comportamentos semelhantes. A dedução a seguir começará com a Eq. (39), para o rotacional de \vec{E} , mas poderíamos começar, igualmente, com a Eq. (41), que descreve o rotacional de \vec{B} .

Começamos, pois, com a Eq. (39) e tomamos o rotacional dos dois lados:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}. \quad (42)$$

O lado esquerdo tem a estrutura algébrica de um duplo produto vetorial. Podemos simplificá-lo, portanto, com base na **identidade**¹

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}. \quad (43)$$

Aplicada a Eq. (43) à Eq. (42), com o cuidado de manter os $\vec{\nabla}$ à esquerda do campo \vec{E} [isto é, escrever $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$ em lugar da expressão sem sentido $(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{\nabla}$] encontramos a expressão

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}. \quad (44)$$

Substituímos agora, no lugar dos parênteses no primeiro termo do lado esquerdo, a Eq. (38), e, no lugar dos parênteses do lado direito, a correção de Maxwell, Eq. (41). Resulta a igualdade

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (45)$$

De maneira análoga, podemos tomar o rotacional da Eq. (41) e substituir as Eqs. (40) e (42) na expressão resultante para chegar a uma equação diferencial equivalente para o campo magnético:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (46)$$

Maxwell preferia trabalhar com os potenciais, em lugar dos campos \vec{E} e \vec{B} , mas chegou a equações equivalentes às Eqs. (45) e (46) e, prontamente, percebeu as implicações. Para discutir a interpretação que ele ofereceu, convém entender melhor as duas igualdades.

Cada uma das Eqs. (45) e (46) constitui três equações diferenciais. A Eq. (46), por exemplo, se desdobra em

$$\nabla^2 B_x = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}, \quad (47)$$

$$\nabla^2 B_y = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}, \quad (48)$$

e

$$\nabla^2 B_z = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}. \quad (49)$$

São, portanto, seis equações. Cada uma tem a forma da equação de onda tri-dimensional

$$\nabla^2 F = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad (50)$$

4 onde F é uma função das variáveis x, y, z e t .

¹ É fácil entender a Eq. (43). O produto $\vec{b} \times \vec{c}$ é um vetor \vec{d} , ortogonal a \vec{b} e a \vec{c} . O produto duplo $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ é o mesmo que $\vec{a} \times \vec{d}$ e, portanto, é ortogonal a \vec{d} . Isso significa que o produto duplo é um vetor no plano formado pelos vetores \vec{b} e \vec{c} . Em outras palavras, o produto duplo é uma combinação linear dos vetores \vec{b} e \vec{c} . É exatamente isso o que nos diz o lado direito da Eq. (43). Os coeficientes da combinação linear são escalares que dependem do vetor \vec{a} . Vemos assim que eles só podem ser $\pm(\vec{a} \cdot \vec{b})$ e $\pm(\vec{a} \cdot \vec{c})$. Para definir os sinais dos dois termos no lado direito da equação, basta considerar casos particulares com os versores de base: $\hat{x} \times (\hat{x} \times \hat{y}) = -\hat{y}$, por exemplo. Na prática, para apoiar a memória, o conto da princesa nômade é útil: uma princesa \vec{a} está na idade de casar e há dois pretendentes, \vec{b} e \vec{c} . O rei, seu pai, recomenda que, para fazer uma escolha sábia, ela pense num critério para escolher o futuro marido; ele aproveita para avisar que o outro pretendente ficará de guarda no castelo preferido pela noiva [os parênteses no lado direito da Eq. (43) representam os castelos]. A princesa pensa com seus botões: "Gosto de viajar; vou escolher o pretendente que mora mais distante." Assim quando o rei se dirige a ela e pergunta se quer casar com \vec{b} ela examina a ordem dos pretendentes dentro dos parênteses em $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, vê que \vec{b} está mais próximo e responde ao pai: "Negativo". Quando o rei pergunta se quer casar com \vec{c} , que está mais distante, ela responde "Positivo". O conto também funciona quando o produto é da forma $(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}$, como você pode comprovar.

No Século XVIII, bem antes de Maxwell nascer, a equação de onda já era conhecida, e o filósofo/matemático francês Jean Baptiste D'Alembert já tinha resolvido a Eq. (50). A solução geral de D'Alembert é uma combinação linear de funções da forma

$$F_{\hat{k}}(\vec{r}, t) = f(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt), \quad (51)$$

onde v é a velocidade que aparece no primeiro fator à direita na Eq. (50) e \hat{k} é um vetor tridimensional arbitrário:

$$\hat{k} = \frac{k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}. \quad (52)$$

A função f no lado direito da Eq. (51) depende apenas das condições iniciais $F(\vec{r}, t=0)$ e $(\partial F/\partial t)_{t=0}$. Ela é função de uma só variável: $f = f(u)$, onde $u = \hat{k} \cdot \vec{r} - vt$. Significa que o perfil da função num dado instante t se repete em qualquer instante posterior $t + \Delta t$, deslocado no espaço por um deslocamento $\Delta r = \hat{k}v\Delta t$.

Em outras palavras, o perfil da função f avança no espaço com velocidade v na direção do vetor \hat{k} . A figura mostra um exemplo, no qual $\hat{k} = \hat{x}$; o deslocamento, nesse caso, é na direção do eixo x .

Maxwell tinha familiaridade com a equação de onda e suas soluções. Reconheceu, portanto, que os campos elétricos e magnéticos poderiam propagar-se, mesmo no vácuo, da mesma maneira que uma onda sonora se propaga no ar, ou que uma onda corre na superfície do mar. Isso constatado, sua primeira providência foi calcular o produto $\mu_0\epsilon_0$. A comparação entre as Eqs. (46) e (50) mostra que a velocidade nas equações de onda que ele encontrara é $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. Podemos repetir esse cálculo com os valores anotados nas Eqs. (5) e (9):

$$v = \frac{1}{\sqrt{8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \times 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}. \quad (53)$$

A velocidade da luz, que hoje é definida como

$$c \equiv 299\,792\,458 \text{ m/s}, \quad (54)$$

já tinha sido precisamente medida, na época. As constantes ϵ_0 e μ_0 eram conhecidos com menos precisão, mas o cálculo que reproduzimos concordou com a velocidade da luz com desvio na ordem de 1%. Maxwell achou muito improvável que fosse **coincidência**² e concluiu que a luz era um exemplo de propagação ondulatória dos campos elétrico e magnético.

Com o tempo, essa descoberta, uma resposta matematicamente precisa para uma questão que desafiara a curiosidade da humanidade desde o tempo das cavernas, iria revolucionar o mundo.

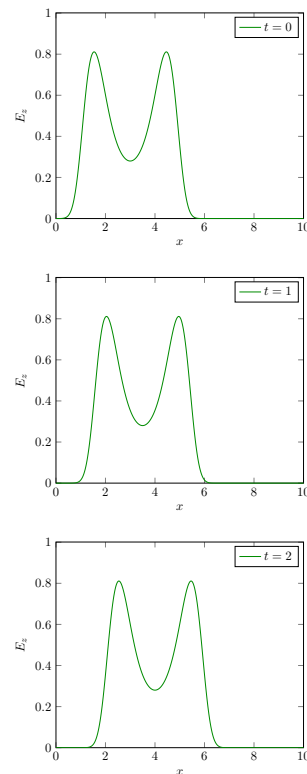


Figura 3: Evolução temporal do perfil do campo elétrico. O campo é paralelo ao eixo z e tem a forma da Eq. (51) com $\hat{k} = \hat{x}$. O eixo vertical é expresso em unidades de V/cm, o tempo, em segundos e o eixo horizontal, em segundos-luz.

² Seis décadas antes, no início do Século XIX, a experiência de Young mostrou que a luz é uma onda.