DSTQQSS
DLMMJVS

Exemplos de Resolução d. Exercícios da TIC1

Importante: Enfatizamos a parte de que são Exemplos. Existem muitas formas de se resolver e a gente não quer moldar o jeito que vocês vão fazer. O importante é só que o raciocínio esteja correto, claro e não tenha saltos lógicos.

3) Mostre que o conjunto vazio é único.

Dem.: Seja A um conjunto tal que $\forall x (x \notin A)$ e B um conjunto tal que $\forall x (x \notin B)$.

Dado um x qualquer, $x \in A$ é falso. Portanto, a implicação $x \in A \to x \in B$ é verdadeira. Como a implicação é verdadeira para qualquer x vale $\forall x (x \in A \to x \in B)$, ou seja, $A \subseteq B$.

De forma análoga, como B não possui elementos, temos que $x \in B \to x \in A$ para todo x, em outras palavras, $\forall x (x \in B \to x \in A)$.

Como $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, podemos concluir que $A = B$.

Acabamos de provar que o conjunto não tem elementos é único, portanto, o chamaremos de $\emptyset$.

4) iii) $A \subseteq \{a\}$ se e somente se $A = \{a\}$ ou $A = \emptyset$

Dem.: ($\Rightarrow$) Se $A \subseteq \{a\}$, temos $\forall x (x \in A \to x \in \{a\})$.

Assim, se $x \in A$, podemos concluir $x \in \{a\}$, mas como $\{a\}$ só tem um elemento, temos que $x = a$.

Com isso, temos duas possibilidades:

- Ou A não tem elementos, e nesse caso $A = \emptyset$
- Ou A tem elementos, e todos são iguais a a, ou seja, $A = \{a\}$

($\Leftarrow$) Se $A = \emptyset$, como vimos que o $\emptyset$ está em todo conjunto, $A \subseteq \{a\}$

Se $A = \{a\}$, como todo conjunto está contido nele mesmo, $A \subseteq \{a\}$

©Disney

14) c) Se $A \subseteq B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Dem: Seja $X \in \mathcal{P}(A)$. Por definição de $\mathcal{P}(A)$ temos que $X \subseteq A$.
Mas como $A \subseteq B$, pelo exercicio 14) b), podemos concluir que $X \subseteq B$, ou em outras palavras, $X \in \mathcal{P}(B)$
Assim, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$