AULAS ANTERIORES

25/09/2020

Seja $T: V \longrightarrow W$ uma TL, então:

$$(\mathrm{I}) \quad T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}), \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$$

$$(\mathrm{II}) \quad T(\alpha \vec{u}) = \alpha T(\vec{u}), \ \forall \vec{u} \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Propriedades:

1) $T(\vec{0}) = \vec{0}$

2) $T(a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_n \vec{v}_n) = a_1 T(\vec{v}_1) + \dots + a_n T(\vec{v}_n)$

* $N(T) = \{ \vec{v} \in V \ / \ T(\vec{v}) = \vec{0} \} \longrightarrow$ SEV de V
* $Im(T) = \{ \vec{w} \in W \ / \ T(\vec{v}) = \vec{w} \} \longrightarrow$ SEV de W

T é injetora $\iff N(T) = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim(N(T)) = 0$ Nulidade

$\in$ domínio V

BIJETORA

T é sobrejetora $\iff Im(T) = W \Rightarrow \dim(Im(T)) = \dim(W)$ Posto

Teorema da Dimensão:

$$\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))$$

Corolário:

$T: V \to W$

$\dim(V) = \dim(W)$

T é sobrejetora

$\downarrow$

T é bijetora

$\downarrow$

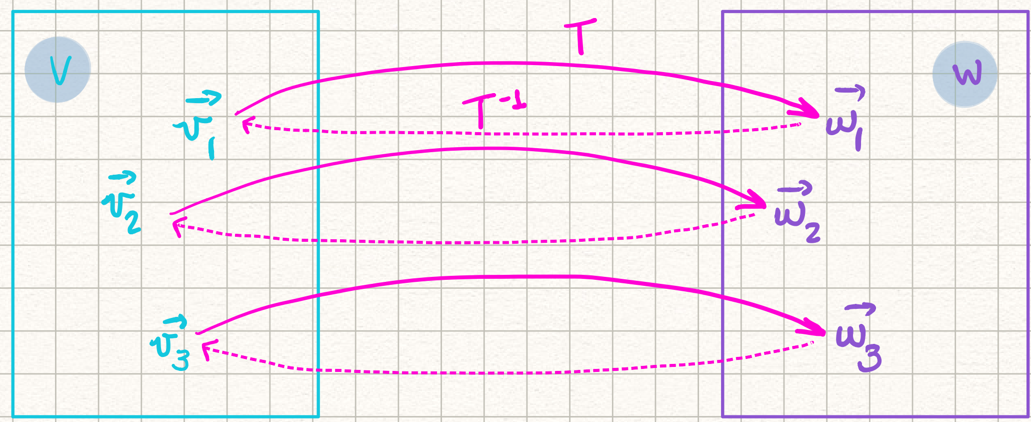
T é injetora

$\downarrow$

T transforma base de V em base de W

Slide 19 - Definição

$\dim(V) = \dim(W)$



T é um ISOMORFISMO!

Slide 20 - Exemplo : $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x-2y, z, x+y)$

Existe T^{-1} se T for um isomorfismo , ou seja , T $\begin{cases} \text{injetora} \\ \text{sobrejetora} \end{cases}$

Como $V = W = \mathbb{R}^3$, $\dim(V) = \dim(W)$ e o Corolário do T. Dimensão se aplica . Então , se for possível mostrar que T é injetora , tem-se que T é um isomorfismo . Isso equivale a mostrar que $N(T) = \{\vec{0}\}$.

$$\rightarrow N(T) = \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \vec{0}\} , \begin{cases} \vec{v} = (x,y,z) \in V = \mathbb{R}^3 \\ \vec{0} = (0,0,0) \in W = \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$$T(x,y,z) = (0,0,0)$$

$$(x-2y, z, x+y) = (0,0,0) \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \longrightarrow x = y = z = 0$$

$$\therefore N(T) = \{\vec{0}\} \text{ e } T \text{ é injetora} \Rightarrow T \text{ é bijetora}$$

Logo , T é um isomorfismo .

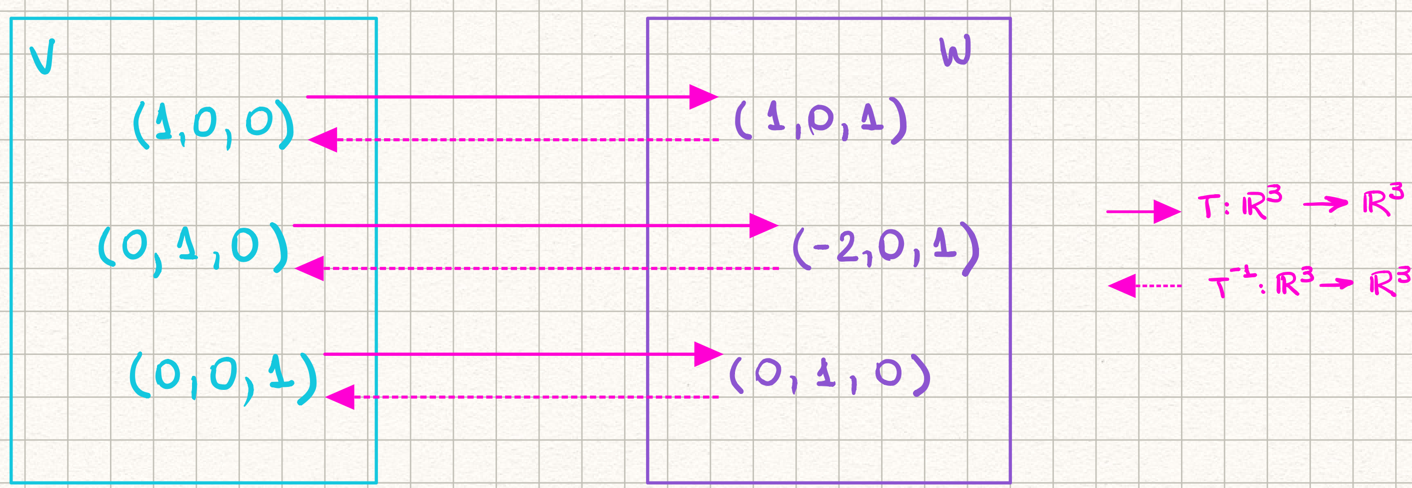
Ainda do Corolário do T. Dimensão, sabe-se que T leva de base de V em base de W. Considere a base canônica do $\mathbb{R}^3$ $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ em V, para levar em outra base em W:

$T(x-2y,\ z,\ x+y)$

$$\text{Como}\quad \left\{\begin{array}{l} T\underbrace{\begin{array}{l}(1,0,0)\\(0,1,0)\\(0,0,1)\end{array}}_{\text{base canônica}} = \underbrace{\begin{array}{l}(1,0,1)\\(-2,0,1)\\(0,1,0)\end{array}}_{\text{outra base}} \end{array}\right. \begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\}\in Oxz\\ \}\in Oy\end{array}$$

$$\text{então}\quad \left\{\begin{array}{l} T^{-1}(1,0,1) = (1,0,0)\\ T^{-1}(-2,0,1) = (0,1,0)\\ T^{-1}(0,1,0) = (0,0,1)\end{array}\right.$$

Com isso, será possível calcular o isomorfismo inverso T^{-1}:



Todo $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como CL dos vetores de qualquer base do $\mathbb{R}^3$. Considerando a base não canônica de W $\{\underbrace{(1,0,1)}_{\vec{v}_1}, \underbrace{(-2,0,1)}_{\vec{v}_2}, \underbrace{(0,1,0)}_{\vec{v}_3}\}$, tem-se:

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$$

ou

$$(x,y,z) = a_1(1,0,1) + a_2(-2,0,1) + a_3(0,1,0)$$

$$\vdots$$

$$(a_1 - 2a_2,\ a_3,\ a_1 + a_2)$$

De onde se tem o sistema:

$$\begin{cases} a_1 - 2a_2 = x & (i) \\ a_3 = y & (ii) \\ a_1 + a_2 = z & (iii) \end{cases}$$

(ii): $a_3 = y$

$(i) + 2(iii)$: $a_1 = \frac{1}{3}(x + 2z)$

$a_1 \longrightarrow (i)$: $a_2 = \frac{1}{3}(z - x)$

T^{-1} é uma TL, portanto, vale a Propriedade das TLs, para $\vec{v}$ CL dos vetores da base:

$$T^{-1}(\vec{v}) = T^{-1}(a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3})$$

$$T^{-1}(\vec{v}) = a_1 T^{-1}(\vec{v_1}) + a_2 T^{-1}(\vec{v_2}) + a_3 T^{-1}(\vec{v_3})$$

$$T^{-1}(x,y,z) = a_1 T^{-1}(1,0,1) + a_2 T^{-1}(-2,0,1) + a_3 T^{-1}(0,1,0)$$

$$T^{-1}(x,y,z) = \frac{1}{3}(x+2z)(1,0,0) + \frac{1}{3}(z-x)(0,1,0) + y(0,0,1)$$

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+2z}{3}, 0, 0\right) + \left(0, \frac{z-x}{3}, 0\right) + (0,0,y)$$

Portanto:

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+2z}{3}, \frac{z-x}{3}, y\right)$$

* Como saber se está correto? Testar para $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ ou $\vec{v_3}$!

$\vec{v_1} = (1,0,1) \longrightarrow T^{-1}(\vec{v_1}) = (1,0,0)$

Confere!