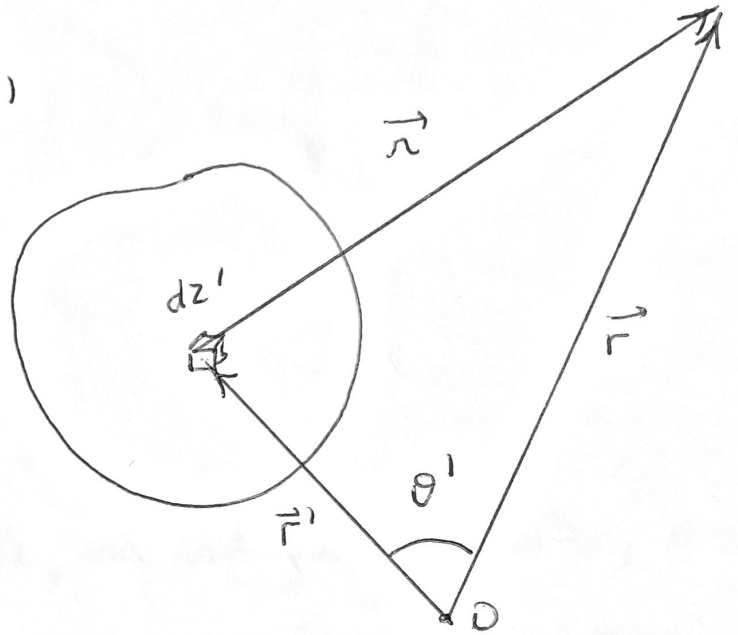


25/09/2020

①

Vimos na aula passada que o potencial eletrostático de uma distribuição genérica de carga elétrica

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dz',$$

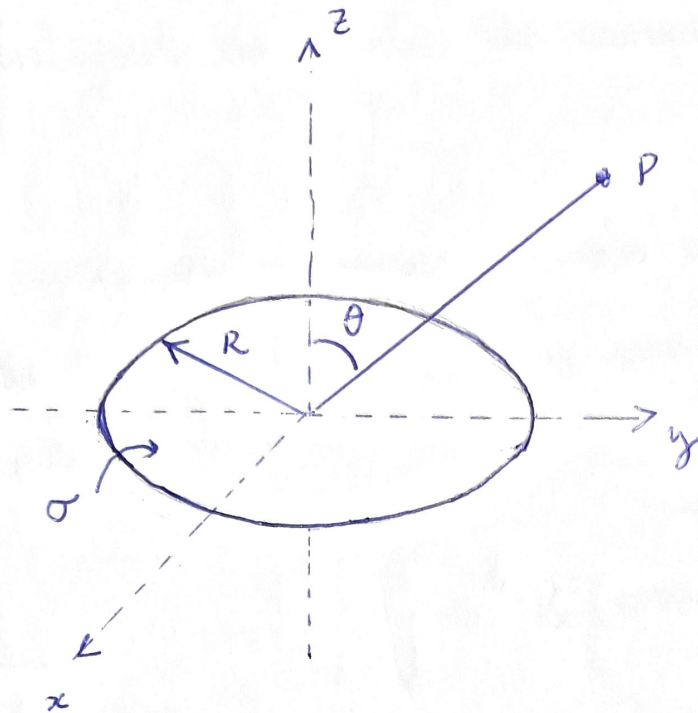


admite uma expansão, dita multipolar, na região $r'/r < 1$ na forma

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int r'^l P_l(\cos\theta') \rho(\vec{r}') dz'$$

$$= V_{\text{mono}} + V_{\text{dip}} + V_{\text{quad}} + V_{\text{octo}} + \dots$$

Exemplo: disco de raio R uniformemente carregado (2)



Já calculamos anteriormente, via integração direta, o campo elétrico sobre o eixo de simetria desse disco

$$\vec{E}(z) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \hat{z} \quad \begin{array}{l} + (z > 0) \\ - (z < 0) \end{array}$$

O potencial eletrostático sobre o eixo z também pode ser obtido via integração direta

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}')}{r} da = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^R \frac{s'}{(z^2 + s'^2)^{1/2}} ds'$$

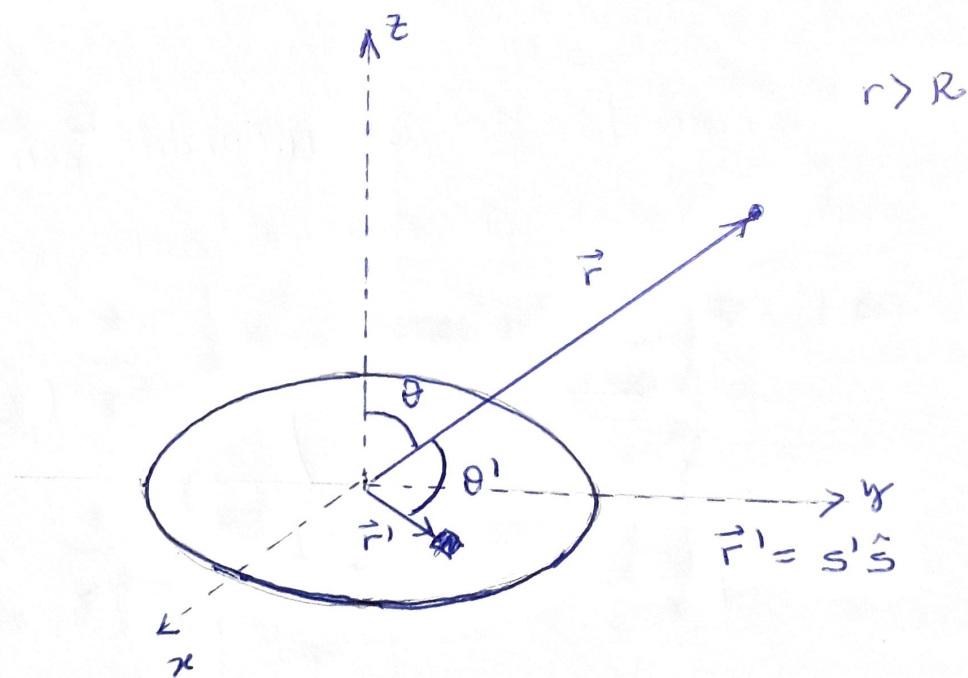
$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right]$$

Exercício: repita o cálculo de $V(z)$, mas agora usando a integral de linha do campo elétrico

(3)

Calculamos agora os primeiros termos da expansão multipolar de $V(\vec{r})$ do disco para um ponto qualquer na região $r > R$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int s^l P_l(\cos\theta') \sigma(s) da'$$



$$V_{\text{mono}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \pi R^2}{r} = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 r}$$

Perceba que por simetria, o potencial não deve ter dependência em ϕ para esse caso particular do disco.

$$V_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

(4)

Momento de dipolo do disco

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int \vec{r}' \sigma(\vec{r}') da' = \sigma \int_0^R s' ds' \int_0^{2\pi} (s' \hat{s}) d\phi' \\ &= \sigma \int_0^R s' ds' \int_0^{2\pi} [s' \cos\phi' \hat{x} + s' \sin\phi' \hat{y}] d\phi' = \vec{0} \end{aligned}$$

Logo

$$V_{\text{dip}} = 0$$

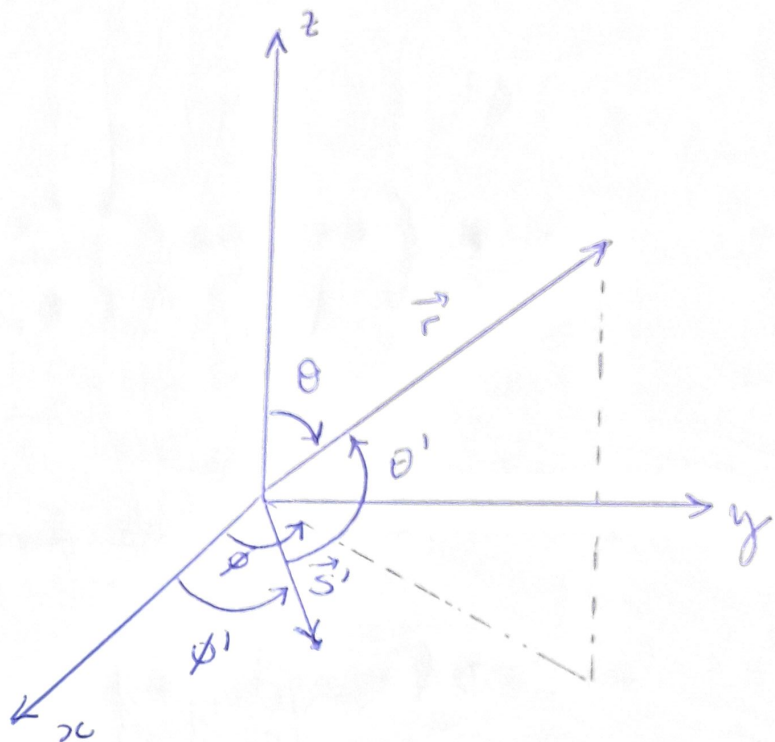
$$\begin{aligned} V_{\text{quad}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int_0^{2\pi} \int_0^R s'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta' - \frac{1}{2} \right) \sigma(s') da' \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int_0^{2\pi} d\phi' \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta' - \frac{1}{2} \right) \int_0^R s'^3 ds' \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta' - \frac{1}{2} \right) d\phi' \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \frac{R^4}{4} \left\{ -\pi + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta' d\phi' \right\} \end{aligned}$$

(5)

$$\cos\theta' = \hat{s} \cdot \hat{r}$$

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$$

$$\hat{s} = \cos\phi' \hat{x} + \sin\phi' \hat{y}$$



$$\hat{r} \cdot \hat{s} = \sin\theta \cos\phi \cos\phi' + \sin\theta \sin\phi \sin\phi'$$

$$(\hat{r} \cdot \hat{s})^2 = \cos^2\theta' =$$

$$= \sin^2\theta \left[\cos^2\phi \cos^2\phi' + \sin^2\phi \sin^2\phi' + \frac{1}{4} \sin(2\phi) \sin(2\phi') \right]$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta' d\phi' = \sin^2\theta \left\{ \cos^2\phi \int_0^{2\pi} \cos^2\phi' d\phi' + \sin^2\phi \int_0^{2\pi} \sin^2\phi' d\phi' \right\}$$

$$= \sin^2\theta \pi (\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \pi \sin^2\theta$$

Então

(6)

$$V_{\text{quad}} = \frac{\sigma}{16\epsilon_0} \frac{R^4}{r^3} \left(\frac{3}{2} \sin^2\theta - 1 \right)$$

e portanto, para $r > R$

$$V(r, \theta) = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 r} + \frac{\sigma}{16\epsilon_0} \frac{R^4}{r^3} \left(\frac{3}{2} \sin^2\theta - 1 \right) + \dots$$

Voltemos à expressão geral da expansão multipolar

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int s'^l P_l(\cos\theta') \sigma(s') da'$$

e a apliquemos a pontos do eixo z ($\cos\theta' = 0$)

$$V(r, \theta) \xrightarrow{\theta=0, \pi} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int s'^l P_l(0) da'$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_2(x) = x$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

\vdots

$$P_l(0) = 0 \quad \forall l \text{ ímpar}$$

Então

(7)

$$V(r, 0) = V(r, \pi) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_{2l}(0)}{r^{2l+1}} \int s'^{2l} da'$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_{2l}(0)}{r^{2l+1}} \int_0^R s'^{2l+1} ds'$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_{2l}(0)}{r^{2l+1}} \frac{R^{2l+2}}{2l+2}$$

$$= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_{2l}(0)}{2(l+1)} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} \quad \text{p/ } \frac{R}{r} < 1$$

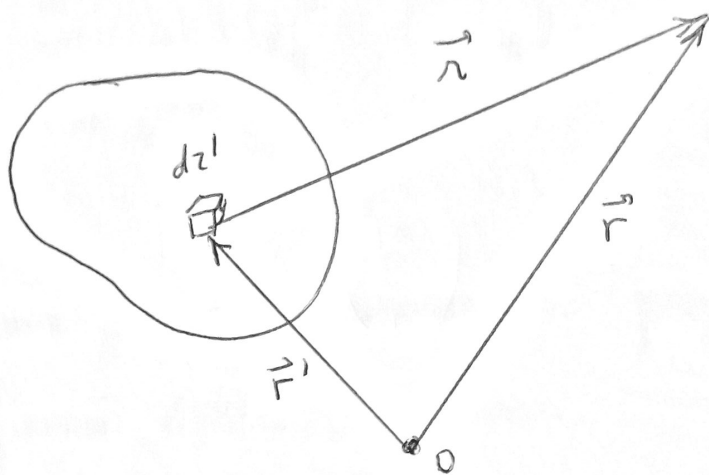
Se identificarmos $r = |z|$, a série acima deve convergir para o resultado exato que obtivemos anteriormente.

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right] = \frac{\sigma |z|}{2\epsilon_0} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2} - 1 \right\}$$

Expansão multipolar e a origem do sistema de coordenadas

(8)

Em geral, a forma da expansão multipolar depende da escolha da origem do sistema de coordenadas



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \underbrace{\int r'^l P_l(\cos\theta') \rho(\vec{r}') dz'}_{\text{depende da escolha da origem } O!}$$

depende da escolha da origem O !

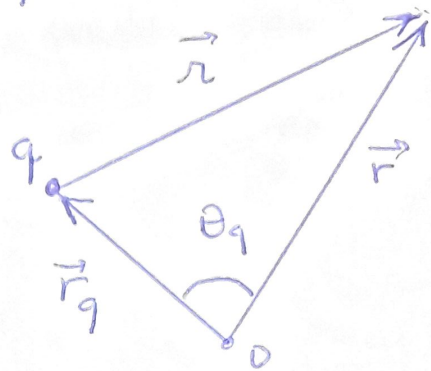
Uma boa escolha de origem pode facilitar os cálculos

Exemplo: carga pontual q na posição \vec{r}_q

(9)

$$\rho(\vec{r}') = q \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_q)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+2}} \int r'^l P_l(\cos\theta') q \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_q) d^3r'$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} r_q^l P_l(\cos\theta_q)$$



onde na última passagem usamos a propriedade de filtro da função delta de Dirac.

Perceba então que para uma escolha de origem tal que $r_q \neq 0$, a expansão multipolar do potencial de uma carga pontual conterá multipolos de arbitrariamente alta. (todo $l \geq 0$).

Mas se $r_q = 0$ (carga na origem)

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = V_{\text{mono}}$$

Perceba que esse termo também é igual ao termo de monopolo p/ $r_q \neq 0$.

(10)

A invariância do termo de monopolo sob mudanças da origem do sistema de coordenadas é válida não só para cargas pontuais, mas para distribuições arbitrárias de cargas.

Ela é uma consequência direta da invariância da carga elétrica sob mudança de referencial, já que mostramos que

$$V_{\text{mono}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Já para o caso do termo de dipolo

$$V_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2},$$

o momento de dipolo em geral não é invariante sob uma mudança de coordenadas tal que

$$\vec{r}' \longrightarrow \vec{r}'' = \vec{r}' - \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \vec{P} \longrightarrow \vec{\tilde{P}} &= \int \vec{r}'' \rho(\vec{r}'') dz'' = \int (\vec{r}' - \vec{a}) \rho(\vec{r}') dz' \\ &= \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dz' - \vec{a} \int \rho(\vec{r}') dz' \end{aligned}$$

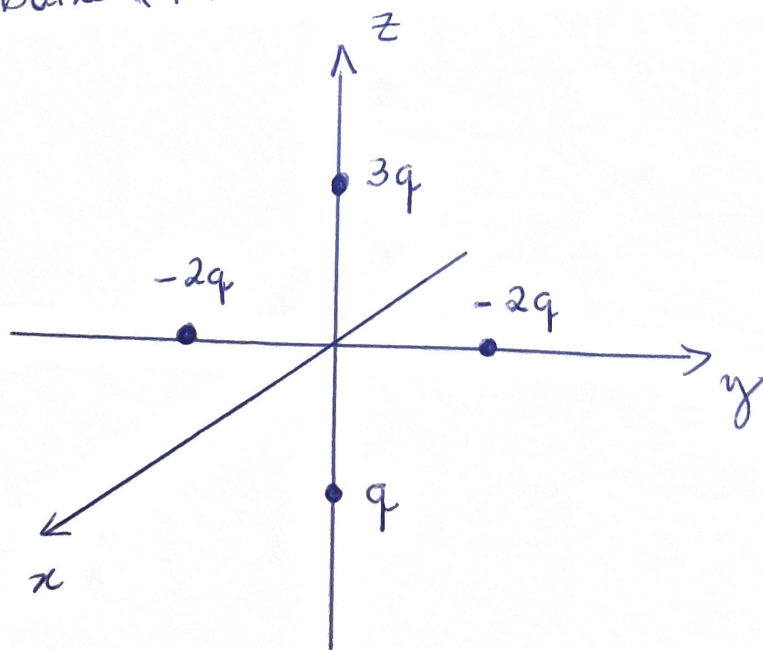
Portanto

$$\vec{p} \approx \vec{p} - Q \vec{a}$$

Vemos então que no caso de distribuições de cargas total nula ($Q=0$), o momento de dipolo passa a ser invariante sob mudança de origem.



Exercício = Escrever a expressão para o termo dominante da expansão multipolar do potencial $V(\vec{r})$ para pontos distantes da origem ($r \gg a$) para o sistema de cargas pontuais abaixo (todas a distância a da origem)



$$V_{\text{mono}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} = 0 \text{ já que } Q = 0$$

$$V_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^4 \vec{r}_i' q_i$$

$$= q \left\{ -a \hat{z} - \cancel{2a \hat{y}} + \cancel{2a \hat{y}} + 3a \hat{z} \right\}$$

$$= 2aq \hat{z}$$

Então

$$V_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq \hat{z} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{aq}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$

