QUESTÕES ANPEC – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

QUESTÃO 1

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) A solução da equação diferencial $\dot{y} = y - y^3$ apresenta 3 equilíbrios estacionários quando $t \to \infty$, dependendo da condição inicial: $y = -1$, $y = 0$ e $y = 1$. O equilíbrio $y = 0$ é o único que é instável.

(1) Considere a equação diferencial $\dot{y} = f(y)$, em que f é uma função continuamente diferenciável tal que $f(k) = 0$. Se $f' > 0$ então, para qualquer condição inicial, a solução diverge.

(2) A solução da equação diferencial de 2ª ordem $\ddot{y} + \dot{y} + c = 0$ apresenta ciclos se, e somente se, $c > 1/4$.

(3) Sejam $z_{n+1} = Az_n$ um sistema de 2 equações em diferenças finitas e r_1, r_2 os autovalores de A. Se $0 < r_1 < 1$ e $r_2 < 0$ então o sistema converge com oscilações para 0 quando $n \to \infty$.

(4) No modelo de funcionamento dinâmico de um mercado descrito pelo *Cobweb cycle* a demanda na data t (D_t) é função do preço corrente p_t, enquanto que a oferta (S_t) é função do preço praticado no período precedente p_{t-1}. A demanda e oferta são especificadas como $D_t = \alpha + \beta p_t$ e $S_t = \gamma + \delta p_{t-1}$, em que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são constantes. Então, com o passar do tempo, o mercado converge para um equilíbrio estável se, e somente se, $|\delta| < |\beta|$ e $(\gamma - \alpha)/\beta < 0$.

QUESTÃO 2

Sabendo que a função $y : \Re \to \Re$ satisfaz à equação diferencial de primeira ordem, $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{2} = 5x$, e que no ponto $x = 0$ tem-se $y(0) = e + 10$, calcule $y(2)$.

QUESTÃO 3

Considerando que a função *y*: $\Re^+ \to \Re$ satisfaz à equação diferencial de primeira ordem $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$, e que *y*(*x* = 3) = 18, qual deve ser o valor de x para que y(x) seja igual a 4?

QUESTÃO 4

Considerando uma solução $x(t)$ qualquer da equação diferencial $3 \cdot x''(t) + 4 \cdot x'(t) + x(t) = 0$, assinale V (verdadeiro) ou F (falso)

(0) se $x(t)$ é uma função não-nula então $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$;

(1) se $x(t)$ é uma função não-nula então $\lim_{t \to -\infty} x(t) = +\infty$;

(2) $x(t)$ tem um ponto de mínimo global na reta real $\Re$;

(3) se $x(t)$ é tal que $x(0)=0$ e $x'(0)=1$ então $\lim_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$;

(4) se $x(t)$ é tal que $x(0)=0$ e $x'(0)=1$ então $x(t)$ tem um ponto de máximo global na reta real $\Re$.

QUESTÃO 5

Considere a equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ com $y(0)=2$ e $\frac{dy(0)}{dx} = 2$. Calcule $y(\ln(2))$.

QUESTÃO 6

Avalie as afirmativas:

(0) Seja *f:* $\Re \to \Re$ uma função duas vezes continuamente diferenciável. Se f atinge um máximo local estrito em x_0, então $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$.

(1) Se uma matriz simétrica *nxn A* é idempotente, então para todo $v \in \Re^n$, $v'Av \geq 0$.

(2) Se uma matriz *nxn A* é idempotente, então $tr(A) \geq n$.

(3) A equação diferencial $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$ tem solução geral $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$, em que C_1 e C_2 são constantes

(4) A equação diferencial $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ tem solução geral $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t/2}$, em que C_1 e C_2 são constantes.

QUESTÃO 7

Se a função $y(x)$ é uma solução da equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$ e $y(0)=1$, calcule o valor de $\frac{d^3y}{dx^3}(0)$.

QUESTÃO 8

Avalie as opções

(0) Seja $x_t = 0{,}5x_{t-1} + 3$, $x_0 = 0$. Então, $\lim_{t\to\infty} x_t = 6$.

(1) Seja $x_t = 0{,}5x_{t-1} + 3$, $x_0 = 2$. Então, $\lim_{t\to\infty} x_t = 8$.

(2) Se $x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2}$, então, $\lim_{t\to\infty} x_t = K$, em que K é finito, se e somente se α_0 e α_1 forem menores do que 1 em módulo.

(3) Uma matriz A $n \times n$ é diagonalizável somente se seus autovalores forem todos distintos.

(4) Considere duas séries de números positivos $S_n = \Sigma_n a_n$ e $S_n^* = \Sigma_n b_n$ com $a_n \geq b_n$ para todo $n > 100$. Então se S_n converge, S_n^* também converge.

QUESTÃO 9

Seja *y(x)* uma solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} + 2y = 4$. Calcule $\lim_{x \to \infty} y(x)$.

QUESTÃO 10

Dada uma equação diferencial de segunda ordem $\frac{d^2y}{d^2t} + a\frac{dy}{dt} + by = c$. Onde $c \neq 0$, diga quais afirmações são verdadeiras ou falsas.

(0) Existem infinitas soluções da equação diferencial.

(1) Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções, então $y_3(t)$, definida como $y_3(t) \equiv y_1(t) + y_2(t)$ também é solução.

(2) Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções e se $a > 0$, $b > 0$, então $y_1(t) - y_2(t)$ converge a 0 quando $t \to \infty$.

(3) Se $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y_3(t)$ são soluções, então $y_4(t)$ definida como $y_4(t) \equiv y_1(t) - y_2(t) + y_3(t)$, também é uma solução.

(4) Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções, então $y_3(t) \equiv y_1(t).y_2(t)$ também é solução.

QUESTÃO 11

Dada a equação em diferenças finitas

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 2$$

diga quais afirmações são verdadeiras ou falsas:

(0) A equação não possui soluções constantes.

(1) As soluções convergem para 0 quando $t \to \infty$.

(2) Toda solução é combinação linear de funções trigonométricas.

(3) Se $y_t^{(1)}$ e $y_t^{(2)}$ são soluções, então $y_t^{(3)} \equiv y_t^{(1)} + y_t^{(2)}$ também é solução.

(4) Se $y_t^{(1)}$, $y_t^{(2)}$ e $y_t^{(3)}$ são soluções, então $y_t^{(4)} \equiv y_t^{(1)} - y_t^{(2)} + y_t^{(3)}$ também é solução.

QUESTÃO 12

Suponha que para uma economia se manter em equilíbrio, o investimento deva crescer de acordo com a equação

I(t) = I(0)$e^{0,03t}$ onde $e^{0,03t}$ = exp(0,03t)

Qual é a taxa percentual de crescimento correspondente a ela?

QUESTÃO 13

Dada a equação $\frac{d_y}{d_t} = a_y$, determine o valor de y(2) sabendo-se que y(0) = 10e^{-2e}.

QUESTÃO 14

Dada a equação $\frac{d_y}{d_t} = -0{,}5y + 10$, indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas.

(0) A equação é convergente.
(1) A solução de equilíbrio tem valor 20.
(2) Sabemos que o valor y(0) é maior que o valor de equilíbrio.
(3) A trajetória de y(t) não é cíclica.
(4) A solução pode ter raízes complexas.

QUESTÃO 15

Determine o valor da solução da equação x(t + 1) = 0,5x(t) + 5, t = 0, 1, 2, ..., para t = 50, sabendo-se que x(0) = 10.

QUESTÃO 16

Assinale as afirmações verdadeiras e as falsas:

(0) A função -4senx + 3cosx é solução da equação diferencial y” + y = 0.
(1) A função x + senx é solução de y” + y = 1.
(2) Há apenas uma solução de y” + y = 1 satisfazendo y(0) = 1.
(3) A equação y” + y = 0 possui no máximo duas soluções linearmente independentes.
(4) Se a função h(x), x $\in \Re$ é solução de y” + y = 0, então a função 1 + h(x), x $\in \Re$ é solução de y” + y = 1.

QUESTÃO 17

Sabendo que a função $y = y(x), \quad x > 0$ satisfaz $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y = x, \quad x > 0$, e que *y*(1)=1, calcule *y*(2).

QUESTÃO 18

Sabendo que a função *y* = *y(x), x* > *0* satisfaz à equação diferencial de primeira ordem $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1+x} y = \frac{1}{1+x}$ e que *y(0)* = 3, calcule *y(1).*

QUESTÃO 19

Sabendo que a função *y(x)* satisfaz à equação diferencial de segunda ordem $2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+3y=15$ e que $y(0) = 0$ e $\frac{dy}{dx}(0)=0$, calcule $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

QUESTÃO 20

Dada a equação em diferenças finitas $y_{t+1}=-\frac{1}{3}y_t-2$ e sabendo que $y_o=\frac{1}{2}$, indique se as afirmativas a seguir são verdadeiras ou falsas:

(0) A variável y_t converge para 1/2 sem oscilações.
(1) A variável y_t converge para -3/2 com oscilações.
(0) $y_t=2\left(-\frac{1}{3}\right)^t-\frac{3}{2}$
(1) $y_t=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^t$
(2) $y_t=2e^{\frac{t}{3}}-6$

QUESTÃO 21

Considere a seguinte equação de diferenças não homogênea:

$$y_t=\frac{9}{10}y_{t-1}+2, \text{com } y_1=11.$$

Sua solução geral é dada por:

$$y_t=a(m)^t+b$$

(0) A variável y_t converge para que valor?
(1) Calcule o valor de $(10\,m+a)$?
(2) Calcule o valor de b.
(3) Partindo-se de $t=0$, qual o valor inicial de y_t ?

QUESTÃO 22

Dada a equação diferencial $y''+2y'+2y=1$, indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas:

(0) Toda solução desta equação converge de forma oscilante para 1/2.
(1) $y(t)=1/2$ é a única solução estacionária (i.e., constante) da equação.
(2) O polinômio característico associado à equação possui raízes reais.

(3) A solução geral desta equação é dada por:
$$y(t)= e^{-t}(k_1 \cos t + k_2 sent) + 1/2;\ k_1, k_2 \text{ constantes reais.}$$

QUESTÃO 23

Considere a equação de diferenças finitas $x_{n+2} = px_{n+1} + (1-p)x_n$, onde $p \in]0,1[$. Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmativas abaixo:

(0) Se x_1= 0 então não existe $\lim_{n\to\infty} x_n$.
(1) Se $x_m = x_n$ para algum m diferente de n então x_n = constante.
(2) Se a sequência $\{x_n\}$ é uma progressão geométrica, então a razão é necessariamente $1-p$.
(3) Se x_n não é uma sequência constante, então a sequência cujo termo geral é $\{x_n - x_{n-1}\}$ é uma progressão geométrica de razão negativa.

---

10. Considere a seguinte equação diferencial: $10-(5-y)\dot{y}=2y$

e a condição inicial $y(0)=10$. Suponha que $y(t)\neq 5, \forall t$. Julgue as afirmativas abaixo:

(0) Quando *t =23*, *y* será *56*.

(1) $\lim_{t\to\infty} y(t)=\infty$

(2) $lim_{t\to 5} y(t)=20$

(3) Fora do ponto *t* = *5*, a solução é não-linear.

---

11. Seja $x: \Re \to \Re$ duas vezes diferenciável e considere a equação diferencial $\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$ com as condições $x(0)=1$ e $x(\frac{\pi}{2})=exp\{-\frac{\pi}{2}\}$ (onde *exp* é a exponencial). Se a solução é *x(t)*, julgue as afirmativas abaixo:

(1) $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ e $x(t)\geq 0$, para todo $t\geq 0$.

(2) $\frac{x(2\pi)}{x(\pi)}=-exp\{-\pi\}$

(3) $|x(t)|\leq 1$, para todo $t\geq 0$.

(4) x(t) é periódica porque a equação característica associada à equação diferencial acima possui uma raiz positiva e outra negativa.

---

5) Sabendo que a função real *y* = *y(x),* satisfaz à equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx}+x\,y=e^{-x^2/2},$$

e que $y(2)=5e^{-2}$, calcule *y(0)*.

7) Sabendo que a função real *y(x)* satisfaz à equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4y=40+e^{-3x}$$, calcule $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

10. Considere a equação de diferenças finitas $y_{t-2} - 3\,y_{t-1} + 2\,y_t = 10$.

(0) Sua equação característica é $b^2 - 3b + 2 = 10.$
(1) Uma solução particular é $y^* = 10$.
(2) Sua solução complementar não pode ser obtida.

(3) Representa um processo oscilatório.

QUESTÃO 13

Sabendo que a função $y: R \to R$ satisfaz à equação diferencial ordinária de 2ª ordem, $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x}$ e sendo dados $y(1) = 3e$ e $\frac{dy}{dx}(1) = e^2 + 3e$, assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) A solução homogênea é $y^h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$, em que c_1, c_2 são constantes a determinar;

(1) A solução particular é $y^p(x) = (1/2)e^{2x}$;

(2) As constantes são $c_1 = 3$; $c_2 = -1$;

(3) $y(0) = 2$.

QUESTÃO 14

Considere a equação em diferenças $y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{4} y_t = t - 1$ tal que $y_0 = 1$ e $y_1 = -5$. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) A solução homogênea é : $y_t^h = c_1 (1/2)^t + c_2$;

(1) A solução particular é : $y_t^p = -20 + 4t$;

(2) As constantes são: $c_1 = 21$; $c_2 = 1$;

(3) $y_2 = 25/4$

(4) $\lim_{t \to +\infty} y_t \neq 1$.

QUESTÃO 13

Dada a equação de diferenças finitas do segundo grau $2y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 10$ com valores $y_0 = 3$ e $y_1 = 4$, assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) A solução particular da equação é uma função decrescente;

(1) A solução homogênea da equação é uma função monótona;

(2) Para *t = 2*, o valor da solução geral é $y_2 = -1/2$;

(3) O valor da solução geral no infinito é $\lim_{t \to \infty} y_t = 2$;

(4) O valor da solução geral no infinito independe de y_0 e y_1.

QUESTÃO 14

Sabendo que a função $y: R \to R$ satisfaz à equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 10 + x$, e que $\frac{dy(1)}{dx} = 1 + 3e$, e que $y(1) = 13 + 2e$, calcule $y(0)$.

QUESTÃO 15

Sabendo que a função $y:(-1,+\infty)\to R$ satisfaz à equação diferencial $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{1+x}y=30x$, e que $y(0)=25$, calcule $y(1)$.