

PESQUISA OPERACIONAL I

Prof. Dr. José Vicente Caixeta Filho

Profa. Dra. Catarina Barbosa Careta

Depart. de Economia, Administração e Sociologia

ESALQ - Universidade de São Paulo

**“Dieta de custo
mínimo”**

FORMULAÇÃO GERAL

- Obter a dieta de mínimo custo;
- A partir da disponibilidade de uma série de alimentos;
- Respeitando-se as exigências nutricionais pertinentes.

EXEMPLO I: DIETA PARA PREVENÇÃO DE ANEMIA

Para prevenção da anemia, deve-se adotar uma dieta rica em ferro, vitamina A, vitamina B12 e ácido fólico. Esses nutrientes podem ser encontrados em alimentos como: espinafre, brócolis, agrião, tomate, cenoura, ovo, feijão, grão de bico, soja, carne, fígado e peixe. A Tabela a seguir apresenta as necessidades diárias de cada nutriente, a respectiva quantidade em cada um dos alimentos e preço por alimento.

A fim de prevenir que seus pacientes apresentem anemia, um hospital está estudando uma nova dieta. O objetivo é selecionar os ingredientes, com o menor custo possível, que farão parte das duas principais refeições diárias, de forma que 100% das necessidades diárias de nutrientes sejam atendidas nas duas refeições. Além disso, o total ingerido nas duas refeições não pode ultrapassar 1,5 kg (*adaptado de Belfiore e Fávero, 2012*).

	Porção de 100 gramas				
	Ferro	Vitamina A	Vitamina B12	Ácido fólico	Preço
	(mg)	(UI)	(mcg)	(mg)	(R\$)
Espinafre	3	7400	0	0,4	0,30
Brócolis	1,2	138,8	0	0,5	0,20
Agrião	0,2	4725	0	0,1	0,18
Tomate	0,49	1130	0	0,25	0,16
Cenoura	1	14500	0,1	0,005	0,30
Ovo	0,9	3215	1	0,05	0,30
Feijão	7,1	0	0	0,056	0,40
Grão-de-bico	4,86	41	0	0,4	0,40
Soja	3	1000	0	0,08	0,45
Carne	1,5	0	3	0,06	0,75
Fígado	10	32000	100	0,38	0,80
Peixe	1,1	140	2,14	0,002	0,85
Necessidades diárias	8	4500	2	0,4	

Formulação do problema

Definição das variáveis de decisão do modelo:

x_j = quantidade (kg) do alimento j consumido, $j = 1, 2, 3, \dots, 12$.

Assim, tem-se:

- x_1 = quantidade (kg) de espinafre consumido diariamente
- x_2 = quantidade (kg) de brócolis consumido diariamente
- x_3 = quantidade (kg) de agrião consumido diariamente
- ...
- x_{12} = quantidade (kg) de brócolis consumido diariamente

Formulação do problema

Definição da função objetivo – minimizar o custo total dos alimentos (“C”):

$$\text{Min } 3x_1 + 2x_2 + 1,8x_3 + 1,6x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 4x_8 + 4,5x_9 + 7,5x_{10} \\ + 8x_{11} + 8,5x_{12}$$

Formulação do problema

Definição das restrições – relacionadas às necessidades mínimas diárias de cada nutriente que devem ser atendidas e relacionadas ao peso máximo permitido nas duas refeições:

- Necessidade de ferro

$$30x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 4,9x_4 + 10x_5 + 9x_6 + 71x_7 + 48,6x_8 + 30x_9 + 15x_{10} + 100x_{11} + 11x_{12} \geq 80$$

Formulação do problema

- Necessidade de vitamina A

$$7,4x_1 + 0,1388x_2 + 4,725x_3 + 1,13x_4 + 14,5x_5 + 3,215x_6 + 0,041x_8 + 1x_9 + 32x_{11} + 0,14x_{12} \geq 4,5$$

- Necessidade de vitamina B12

$$x_5 + 10x_6 + 30x_{10} + 1000x_{11} + 21,4x_{12} \geq 20$$

- Necessidade de ácido fólico

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 + 2,5x_4 + 0,05x_5 + 0,5x_6 + 0,56x_7 + 4x_8 + 0,8x_9 + 0,6x_{10} + 3,8x_{11} + 0,02x_{12} \geq 4$$

Formulação do problema

- Total consumido nas duas refeições não pode ultrapassar 1,5 kg

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \leq 1,5$$

- Variáveis de decisão são não negativas

$$x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7; x_8; x_9; x_{10}; x_{11}; x_{12} \geq 0$$

Solução

- $x_2 = 0,427 \text{ kg}$
- $x_7 = 0,698 \text{ kg}$
- $x_8 = 0,237 \text{ kg}$
- $x_{11} = 0,138 \text{ kg}$
- $x_1; x_3; x_4; x_5; x_6; x_9; x_{10}; x_{12} = 0$
- $C = \$ 5,70$

CASO PARA RESOLUÇÃO: CARDÁPIO NO MCDONALD'S

Você, estudante de graduação da ESALQ, já com sólidos conhecimentos de Otimização (e naturalmente, com orçamento limitado a R\$ 50,00 por dia), decide frequentar o McDonald's para tomar refeições diárias. Defina o melhor (e mais barato...) cardápio, para os 7 dias da semana, a partir de modelo de programação linear, levando em consideração:

- a) variedade das refeições (evite comer um Big Mac todo dia ...);
- b) que cada refeição diária seja suficiente para lhe suprir a quota diária recomendada de Calorias (2.000 kcal), gorduras (65 g), Carboidratos (300 g) e Proteínas (54 g);
- c) evite combinações esdrúxulas de alimentos em uma mesma refeição.

As contribuições nutricionais, assim como as informações de preço referentes a cada produto, são apresentadas na Tabela a seguir.

Produto (uma porção)	Var. (qtde)	Preço (R\$)	Calorias (kcal)	Gordura (g)	Carboidr. (g)	Proteínas (g)
Hamburger	X1	5,50	296	12	30	15
Cheeseburger	X2	5,50	304	14	30	16
BigMac	X3	14,50	590	31	47	29
Quarteirão com Queijo	X4	14,00	530	29	35	31
Cheddar McMelt	X5	15,00	550	30	34	33
McNífico Bacon	X6	15,50	562	32	37	32
McChicken	X7	13,50	491	23	53	15
McFish	X8	14,00	394	17	44	13
McFritas méd.	X9	6,00	233	13	24	3
McFritas gr.	X10	7,00	395	22	46	6
Chicken McNuggets (c/ 10)	X11	13,50	431	24	27	28

Continua

Continuação

Produto (uma porção)	Var. (qtde)	Preço (R\$)	Calorias (kcal)	Gordura (g)	Carboidr. (g)	Proteínas (g)
McShake morango méd.	X12	8,00	463	14	68	15
McShake chocolate méd.	X13	8,00	465	14	67	15
Del Valle laranja (300 ml)	X14	5,00	117	0	29	0
Del Valle marac. (300 ml)	X15	5,00	117	0	29	0
Coca-cola (300 ml)	X16	5,50	168	0	40	0
Coca-cola light (300 ml)	X17	5,50	0,6	0	0	0
Guaraná (300 ml)	X18	5,50	149	0	35	1
Guaraná light (300 ml)	X19	5,50	0,6	0	0	0
Sundae de caramelo	X20	5,50	293	9	45	6
Sundae de morango	X21	5,50	260	8	40	6
Sundae de chocolate	X22	5,50	295	10	42	7
Torta de maçã	X23	4,00	241	11	33	2
Torta de banana	X24	4,00	209	6	34	2
Sorv. de casquinha	X25	2,00	284	3	56	5

Direcionamento para a resolução

- Especificar as variáveis
- Formular a função objetivo a ser minimizada
- Definir os tipos de restrições
- Resolver utilizando algum software especializado

Discussões sobre a resolução

- Definição das variáveis: $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{25}$
- Função Objetivo: $\text{Min } \sum_{i=1}^{25} P_i \cdot x_i$

Restrições:

- Calorias: $\sum_{i=1}^{25} C_i \cdot x_i \geq 2000$
- Gorduras: $\sum_{i=1}^{25} G_i \cdot x_i \geq 65$
- Carboidratos: $\sum_{i=1}^{25} Car_i \cdot x_i \geq 300$
- Proteínas: $\sum_{i=1}^{25} Pr_i \cdot x_i \geq 54$

P_i : Preço do produto i

C_i : Calorias do produto i

G_i : Gorduras do produto i

Car_i : Carboidratos do produto i

Pr_i : Proteínas do produto i

MIN $5.5X_1 + 5.5X_2 + 14.5X_3 + 14X_4 + 15X_5 + 15.5X_6 + 13.5X_7 + 14X_8 + 6X_9 + 7X_{10} + 13.5X_{11} + 8X_{12} + 8X_{13} + 5X_{14} + 5X_{15} + 5.5X_{16} + 5.5X_{17} + 5.5X_{18} + 5.5X_{19} + 5.5X_{20} + 5.5X_{21} + 5.5X_{22} + 4X_{23} + 4X_{24} + 2X_{25}$

ST

KCAL) $296X_1 + 304X_2 + 590X_3 + 530X_4 + 550X_5 + 562X_6 + 491X_7 + 394X_8 + 233X_9 + 395X_{10} + 431X_{11} + 463X_{12} + 465X_{13} + 117X_{14} + 117X_{15} + 168X_{16} + 0.6X_{17} + 149X_{18} + 0.6X_{19} + 293X_{20} + 260X_{21} + 295X_{22} + 241X_{23} + 209X_{24} + 284X_{25} \geq 2000$

GORD) $12X_1 + 14X_2 + 31X_3 + 29X_4 + 30X_5 + 32X_6 + 23X_7 + 17X_8 + 13X_9 + 22X_{10} + 24X_{11} + 14X_{12} + 14X_{13} + 9X_{20} + 8X_{21} + 10X_{22} + 11X_{23} + 6X_{24} + 3X_{25} \geq 65$

CARB) $30X_1 + 30X_2 + 47X_3 + 35X_4 + 34X_5 + 37X_6 + 53X_7 + 44X_8 + 24X_9 + 46X_{10} + 27X_{11} + 68X_{12} + 67X_{13} + 29X_{14} + 29X_{15} + 40X_{16} + 35X_{18} + 45X_{20} + 40X_{21} + 42X_{22} + 33X_{23} + 34X_{24} + 56X_{25} \geq 300$

PROT) $15X_1 + 16X_2 + 29X_3 + 31X_4 + 33X_5 + 32X_6 + 15X_7 + 13X_8 + 3X_9 + 6X_{10} + 28X_{11} + 15X_{12} + 15X_{13} + 1X_{18} + 6X_{20} + 6X_{21} + 7X_{22} + 2X_{23} + 2X_{24} + 5X_{25} \geq 54$

CAPITAL) $5.5X_1 + 5.5X_2 + 14.5X_3 + 14X_4 + 15X_5 + 15.5X_6 + 13.5X_7 + 14X_8 + 6X_9 + 7X_{10} + 13.5X_{11} + 8X_{12} + 8X_{13} + 5X_{14} + 5X_{15} + 5.5X_{16} + 5.5X_{17} + 5.5X_{18} + 5.5X_{19} + 5.5X_{20} + 5.5X_{21} + 5.5X_{22} + 4X_{23} + 4X_{24} + 2X_{25} \leq 50$

Solução encontrada para um dia:

Custo: R\$ 26,04

X_2 (Cheeseburger) = 1,854148 unidade

X_{10} (McFritas grande) = 1,328356 unidade

X_{25} (Sorvete de casquinha) = 3,272700 unidades

Discussões sobre a resolução

- **Problema da variedade**

- Para que ao longo da semana o cardápio não seja o mesmo para todos os dias, pode-se rodar o problema sete vezes, uma para cada dia, de forma que a partir do segundo dia acrescenta-se as restrições para eliminar os alimentos escolhidos no dia anterior.
- Por exemplo: no primeiro dia os alimentos escolhidos são: x_2 , x_{10} e x_{25} , então para o segundo dia acrescenta-se as restrições
 - $X_2 = 0$
 - $X_{10} = 0$
 - $X_{25} = 0$
- E o fato de as variáveis trazerem resultados não-inteiros?

MIN $5.5X_1 + 5.5X_2 + 14.5X_3 + 14X_4 + 15X_5 + 15.5X_6 + 13.5X_7 + 14X_8 + 6X_9 + 7X_{10} + 13.5X_{11} + 8X_{12} + 8X_{13} + 5X_{14} + 5X_{15} + 5.5X_{16} + 5.5X_{17} + 5.5X_{18} + 5.5X_{19} + 5.5X_{20} + 5.5X_{21} + 5.5X_{22} + 4X_{23} + 4X_{24} + 2X_{25}$

ST

KCAL) $296X_1 + 304X_2 + 590X_3 + 530X_4 + 550X_5 + 562X_6 + 491X_7 + 394X_8 + 233X_9 + 395X_{10} + 431X_{11} + 463X_{12} + 465X_{13} + 117X_{14} + 117X_{15} + 168X_{16} + 0.6X_{17} + 149X_{18} + 0.6X_{19} + 293X_{20} + 260X_{21} + 295X_{22} + 241X_{23} + 209X_{24} + 284X_{25} \geq 2000$

GORD) $12X_1 + 14X_2 + 31X_3 + 29X_4 + 30X_5 + 32X_6 + 23X_7 + 17X_8 + 13X_9 + 22X_{10} + 24X_{11} + 14X_{12} + 14X_{13} + 9X_{20} + 8X_{21} + 10X_{22} + 11X_{23} + 6X_{24} + 3X_{25} \geq 65$

CARB) $30X_1 + 30X_2 + 47X_3 + 35X_4 + 34X_5 + 37X_6 + 53X_7 + 44X_8 + 24X_9 + 46X_{10} + 27X_{11} + 68X_{12} + 67X_{13} + 29X_{14} + 29X_{15} + 40X_{16} + 35X_{18} + 45X_{20} + 40X_{21} + 42X_{22} + 33X_{23} + 34X_{24} + 56X_{25} \geq 300$

PROT) $15X_1 + 16X_2 + 29X_3 + 31X_4 + 33X_5 + 32X_6 + 15X_7 + 13X_8 + 3X_9 + 6X_{10} + 28X_{11} + 15X_{12} + 15X_{13} + 1X_{18} + 6X_{20} + 6X_{21} + 7X_{22} + 2X_{23} + 2X_{24} + 5X_{25} \geq 54$

CAPITAL) $5.5X_1 + 5.5X_2 + 14.5X_3 + 14X_4 + 15X_5 + 15.5X_6 + 13.5X_7 + 14X_8 + 6X_9 + 7X_{10} + 13.5X_{11} + 8X_{12} + 8X_{13} + 5X_{14} + 5X_{15} + 5.5X_{16} + 5.5X_{17} + 5.5X_{18} + 5.5X_{19} + 5.5X_{20} + 5.5X_{21} + 5.5X_{22} + 4X_{23} + 4X_{24} + 2X_{25} \leq 50$

END

GIN 25

Solução "inteira" encontrada para um dia:

Custo: R\$ 28,00

(7,5% mais cara que a primeira solução)

X2 (Cheeseburger) = 2 unidades

X10 (McFritas grande) = 1 unidade

X25 (Sorvete de casquinha) = 5 unidades

Discussões sobre a resolução

- **Problema da variedade**
 - E se fosse estipulado um máximo de 1 porção por item? Variáveis binárias...
(são variáveis inteiras que podem valer 0 ou 1)

MIN $5.5X_1 + 5.5X_2 + 14.5X_3 + 14X_4 + 15X_5 + 15.5X_6 + 13.5X_7 + 14X_8 + 6X_9 + 7X_{10} + 13.5X_{11} + 8X_{12} + 8X_{13} + 5X_{14} + 5X_{15} + 5.5X_{16} + 5.5X_{17} + 5.5X_{18} + 5.5X_{19} + 5.5X_{20} + 5.5X_{21} + 5.5X_{22} + 4X_{23} + 4X_{24} + 2X_{25}$

ST

KCAL) $296X_1 + 304X_2 + 590X_3 + 530X_4 + 550X_5 + 562X_6 + 491X_7 + 394X_8 + 233X_9 + 395X_{10} + 431X_{11} + 463X_{12} + 465X_{13} + 117X_{14} + 117X_{15} + 168X_{16} + 0.6X_{17} + 149X_{18} + 0.6X_{19} + 293X_{20} + 260X_{21} + 295X_{22} + 241X_{23} + 209X_{24} + 284X_{25} \geq 2000$

GORD) $12X_1 + 14X_2 + 31X_3 + 29X_4 + 30X_5 + 32X_6 + 23X_7 + 17X_8 + 13X_9 + 22X_{10} + 24X_{11} + 14X_{12} + 14X_{13} + 9X_{20} + 8X_{21} + 10X_{22} + 11X_{23} + 6X_{24} + 3X_{25} \geq 65$

CARB) $30X_1 + 30X_2 + 47X_3 + 35X_4 + 34X_5 + 37X_6 + 53X_7 + 44X_8 + 24X_9 + 46X_{10} + 27X_{11} + 68X_{12} + 67X_{13} + 29X_{14} + 29X_{15} + 40X_{16} + 35X_{18} + 45X_{20} + 40X_{21} + 42X_{22} + 33X_{23} + 34X_{24} + 56X_{25} \geq 300$

PROT) $15X_1 + 16X_2 + 29X_3 + 31X_4 + 33X_5 + 32X_6 + 15X_7 + 13X_8 + 3X_9 + 6X_{10} + 28X_{11} + 15X_{12} + 15X_{13} + 1X_{18} + 6X_{20} + 6X_{21} + 7X_{22} + 2X_{23} + 2X_{24} + 5X_{25} \geq 54$

CAPITAL) $5.5X_1 + 5.5X_2 + 14.5X_3 + 14X_4 + 15X_5 + 15.5X_6 + 13.5X_7 + 14X_8 + 6X_9 + 7X_{10} + 13.5X_{11} + 8X_{12} + 8X_{13} + 5X_{14} + 5X_{15} + 5.5X_{16} + 5.5X_{17} + 5.5X_{18} + 5.5X_{19} + 5.5X_{20} + 5.5X_{21} + 5.5X_{22} + 4X_{23} + 4X_{24} + 2X_{25} \leq 50$

END

INT 25

Solução "binária" encontrada para um dia:

Custo: R\$ 34,50

(32,5% mais cara que a primeira solução)

X_2 (Cheeseburger) = 1 unidade

X_{10} (McFritas grande) = 1 unidade

X_{12} (McShake mor. méd.) = 1 unidade

x_{13} (McShake choc. méd.) = 1 unidade

X_{23} (Torta de maçã) = 1 unidade

X_{25} (Sorvete de casquinha) = 1 unidade

Discussões sobre a resolução

- **Problema da variedade**

Combinações esdrúxulas (por exemplo, aceita-se um mínimo de 2 tipos de cada alimento, uma vez que se imagina que haja duas refeições por dia)

- Lanches: $\sum_{i=1}^8 x_i \geq 2$
- Acompanhamentos: $\sum_{i=9}^{11} x_i \geq 2$
- Bebidas: $\sum_{i=12}^{19} x_i \geq 2$
- Sobremesas: $\sum_{i=20}^{25} x_i \geq 2$

MIN $5.5X_1 + 5.5X_2 + 14.5X_3 + 14X_4 + 15X_5 + 15.5X_6 + 13.5X_7 + 14X_8 + 6X_9 + 7X_{10} + 13.5X_{11} + 8X_{12} + 8X_{13} + 5X_{14} + 5X_{15} + 5.5X_{16} + 5.5X_{17} + 5.5X_{18} + 5.5X_{19} + 5.5X_{20} + 5.5X_{21} + 5.5X_{22} + 4X_{23} + 4X_{24} + 2X_{25}$

ST

KCAL) $296X_1 + 304X_2 + 590X_3 + 530X_4 + 550X_5 + 562X_6 + 491X_7 + 394X_8 + 233X_9 + 395X_{10} + 431X_{11} + 463X_{12} + 465X_{13} + 117X_{14} + 117X_{15} + 168X_{16} + 0.6X_{17} + 149X_{18} + 0.6X_{19} + 293X_{20} + 260X_{21} + 295X_{22} + 241X_{23} + 209X_{24} + 284X_{25} \geq 2000$

GORD) $12X_1 + 14X_2 + 31X_3 + 29X_4 + 30X_5 + 32X_6 + 23X_7 + 17X_8 + 13X_9 + 22X_{10} + 24X_{11} + 14X_{12} + 14X_{13} + 9X_{20} + 8X_{21} + 10X_{22} + 11X_{23} + 6X_{24} + 3X_{25} \geq 65$

CARB) $30X_1 + 30X_2 + 47X_3 + 35X_4 + 34X_5 + 37X_6 + 53X_7 + 44X_8 + 24X_9 + 46X_{10} + 27X_{11} + 68X_{12} + 67X_{13} + 29X_{14} + 29X_{15} + 40X_{16} + 35X_{18} + 45X_{20} + 40X_{21} + 42X_{22} + 33X_{23} + 34X_{24} + 56X_{25} \geq 300$

PROT) $15X_1 + 16X_2 + 29X_3 + 31X_4 + 33X_5 + 32X_6 + 15X_7 + 13X_8 + 3X_9 + 6X_{10} + 28X_{11} + 15X_{12} + 15X_{13} + 1X_{18} + 6X_{20} + 6X_{21} + 7X_{22} + 2X_{23} + 2X_{24} + 5X_{25} \geq 54$

LANC) $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \geq 2$

ACOMP) $X_9 + X_{10} + X_{11} \geq 2$

BEB) $X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{17} + X_{18} + X_{19} \geq 2$

SOBRE) $X_{20} + X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} \geq 2$

CAPITAL) $5.5X_1 + 5.5X_2 + 14.5X_3 + 14X_4 + 15X_5 + 15.5X_6 + 13.5X_7 + 14X_8 + 6X_9 + 7X_{10} + 13.5X_{11} + 8X_{12} + 8X_{13} + 5X_{14} + 5X_{15} + 5.5X_{16} + 5.5X_{17} + 5.5X_{18} + 5.5X_{19} + 5.5X_{20} + 5.5X_{21} + 5.5X_{22} + 4X_{23} + 4X_{24} + 2X_{25} \leq 50$

END

INT 25

Solução "inteira" encontrada para um dia:

Custo: R\$ 43,00 (65,1% mais cara que a primeira solução)

X1 (Hamburger) = 1 unidade

X2 (Cheeseburger) = 1 unidade

X9 (McFritas média) = 1 unidade

X10 (McFritas grande) = 1 unidade

X12 (McShake mor. méd.) = 1 unidade

x15 (Del Valle marac.) = 1 unidade

X24 (Torta de banana) = 1 unidade

X25 (Sorvete de casquinha) = 1 unidade

Referências

- BELFIORE, P.; FÁVERO, L. P. **Pesquisa operacional:** para cursos de administração, contabilidade e economia. Rio de Janeiro: Elsevier-Campus, 2012.
- CAIXETA-FILHO, J. V. **Pesquisa operacional: técnicas de otimização aplicadas a sistemas agroindustriais.** São Paulo: Atlas, 2015.