

MAT1514 – A Matemática na Educação Básica



IME-USP

Prof. Dr. Júlio César
Augusto do Valle

Aula - 24/09



Em nossa quarta semana, teremos:

- Orientações TG1 – Sequência didática;
- Condições para Inversibilidade de matrizes;
- Matrizes e sistemas.



TG1 – Sequência didática



→ **Objetivo do TG1:** Proporcionar o contato com tópicos e conteúdos relevantes da matemática na Educação Básica por meio da elaboração de uma sequência didática;



TG1 – Sequência didática



1- Escolher um dos tópicos elencados:

- Semelhança e congruência no Ensino Fundamental II;
 - Semelhança e congruência no Ensino Médio;
 - Malhas, simetrias e mosaicos no Ensino Fundamental I;
 - Malhas, simetrias e mosaicos no Ensino Fundamental II;
 - Perspectivas e planificações no Ensino Fundamental II;
 - Perspectivas e planificações no Ensino Médio;
 - Matemática financeira no Ensino Fundamental I;
 - Matemática financeira no Ensino Fundamental II;
 - Matemática financeira no Ensino Médio;
- ** Qualquer dos tópicos anteriores na Educação de Jovens e Adultos também pode ser escolhido.

TG1 – Sequência didática



2 – Entrar em contato com a Bibliografia Básica disponibilizada para aquele tópico

→ O objetivo da Bibliografia Básica é apresentar um conjunto de possibilidades a serem articuladas nos trabalhos, especialmente referenciadas na pesquisa em Educação Matemática e nas experiências previamente realizadas;

→ Também estará disponível para consulta a *Bibliografia Complementar*, que pode permitir uma visão mais abrangente dos temas;



TG1 – Sequência didática



3 – Pesquisar outros materiais para complementar a Bibliografia Básica sobre o tópico escolhido;

→ *Observar como os conteúdos/tópicos são apresentados em videoaulas, livros didáticos e outros materiais. Observar como são os exercícios propostos. Como são os enunciados? Há imagens? A que tipos de contextos os enunciados dos exercícios remetem? A que tipos de contextos podem se remeter? Como estimular a curiosidade crítica sobre o tópico?*

4 – Elaborar uma sequência didática para tratar do tópico escolhido pelo grupo, conforme orientações dadas na aula de 01/10.

→ *Gravar um áudio de um ou mais integrantes do grupo sintetizando como pensaram a sequência didática.*



TG1 – Sequência didática



Datas e prazos

24/09 – Postagem dos conteúdos da *Bibliografia Básica e Complementar*;

01/10 – Apresentação de um possível modelo para estruturação da sequência didática e introdução de seus elementos constitutivos;

30/10 – Enviar a sequência didática e o áudio elaborados pelo grupo no e-disciplinas;

Critérios de Avaliação:

Adequação da proposta; Consistência; Criatividade para gerar engajamento.

Retomando nossa conversa sobre matrizes inversas e criptografia



- Na aula passada, vimos que é possível obter a matriz inversa, quando ela existe, por meio de sua própria definição;

Determinar a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, se existir, utilizando a definição da matriz inversa.

Resolução

Suponhamos que a matriz inversa é $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, então $A \cdot A^{-1} = I_n$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+3z & y+3w \\ 6z & 6w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x+3z=1 \\ y+3w=0 \\ 6z=0 \\ 6w=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=0 \\ w=\frac{1}{6} \end{cases}$$

Matrizes inversas



- *Vamos refletir sobre esse procedimento?*
→ *Método Gauss-Jordan*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Obter a inversa A^{-1} de A significa encontrar uma matriz

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

tal que $AB = I$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Achar A^{-1} é portanto equivalente a resolver dois sistemas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matrizes inversas



- *Vamos refletir sobre esse procedimento?*
→ *Método Gauss-Jordan*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ao invés de resolver cada um destes sistemas separadamente, podemos resolver os dois sistemas simultaneamente através do método de Gauss-Jordan construindo uma única matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Matrizes inversas



→ *Método Gauss-Jordan*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$2^{\text{a}} \text{ linha} - 3 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$-\frac{1}{2} 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

$$1^{\text{a}} \text{ linha} - 2 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Matrizes inversas



→ *Método Gauss-Jordan*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Podemos verificar este resultado, para nos certificarmos que não cometemos erros de cálculo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrizes inversas



Outro exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Vamos calcular a sua inversa. Então:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{array} \right)$$

$$\text{Então: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = 1/4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizes inversas



Calculadoras para inversão de matrizes:

<http://matrixcalc.org/pt/>

→ Para exercitar o processo de inversão de matrizes por eliminação ou escalonamento,

1- Acesse o MatrixCalculator;

2- Crie duas matrizes 2x2 e duas matrizes 3x3, realize o processo de inversão segundo o método Gauss-Jordan;

3- Confira o resultado (e o procedimento) clicando em “Matriz inversa” e depois clique em “Detalhes (Eliminação de Gauss-Jordan)”

4- Registre observações, percepções, dúvidas.





Fórum – Construindo saberes

→ Já sabemos que nem toda matriz é inversível/invertível. Porém, quais são? Quais são suas propriedades?

→ Quais são as condições para a inversibilidade das matrizes?

Fórum aberto para participação até o fim do dia 30/09.

Foco na reescrita
