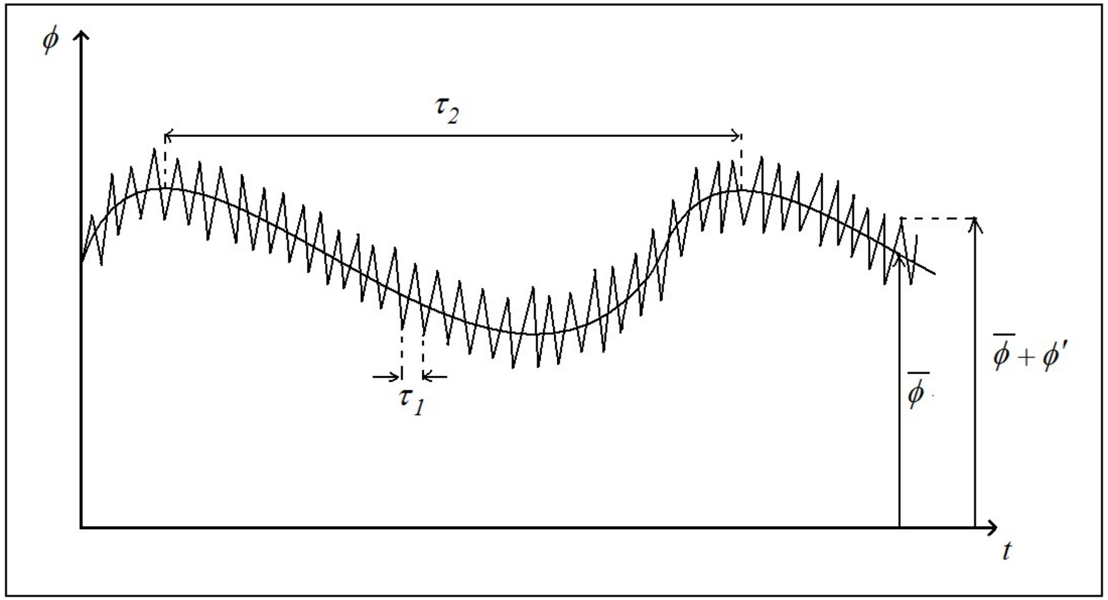
PME 2556 – Dinâmica dos Fluidos Computacional

Aula 9 - Modelo k-ε *Standard*

Decomposição de Reynolds



A decomposição de Reynolds aplicada a um escoamento não-permanente, segundo Wilcox (1993).

$$\phi = \overline{\phi} + \phi'$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} \phi \, dt = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} \left(\overline{\phi} + \phi'\right) dt = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} \overline{\phi} \, dt + \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} \phi' \, dt$$

Decomposição de Reynolds

Se temos $\tau_1 << T << \tau_2$

$$\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} \overline{\phi}\, dt = \overline{\phi}$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} \phi'\, dt = 0$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} \phi\, dt = \overline{\phi}$$

Equações de Reynolds (1)

Equação de Navier-Stokes na forma conservativa para um fluido incompressível:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

Onde:

$$u_i = U_i + u_i' \qquad ; \qquad p = P + p'$$

Equações de Reynolds (2)

RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes)

$$\frac{\partial\left(\rho\overline{u_i}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho\overline{u_i u_j}\right)}{\partial x_j}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right)\right]$$

Resulta:

$$\frac{\partial\left(\rho U_i\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho U_i U_j\right)}{\partial x_j}=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)-\rho\overline{u_i' u_j'}\right]$$

Continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u_j \right)}{\partial x_j} = 0$$

Resulta, para fluido incompressível:

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0$$

Hipótese de Boussinesq para as tensões de Reynolds (1)

Tensões Viscosas: $$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}\, p + \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\,\lambda\,\frac{\partial U_k}{\partial x_k}$$

onde $\lambda = -\frac{2}{3}\mu \rightarrow$ (*hipótese de Stokes*)

Tensões turbulentas ou Tensões de Reynolds:

$$-\rho\,\overline{u_i{}'u_j{}'} = -\delta_{ij}\,\rho\,\frac{2}{3}k + \mu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\,\mu_t\,\frac{\partial U_k}{\partial x_k}$$

Nesta expressão k é a energia cinética da turbulência:

$$k = \frac{\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}}{2}$$

Hipótese de Boussinesq para as tensões de Reynolds (2)

Para fluido incompressível:

$$-\rho\overline{u_i{}'u_j{}'} = -\delta_{ij}\,\rho\frac{2}{3}k + \mu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$$

Substituindo na Equação Média de Reynolds:

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i U_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P_{eff}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_{eff}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

Onde:

$$P_{eff} = P + \rho\frac{2}{3}k \quad ; \quad \mu_{eff} = \mu + \mu_t$$

Equação de k

$$\textit{Multiplicando a equação de Navier} - \textit{Stokes} \quad \frac{Du_i}{Dt}$$

$$\textit{pela flutuação } u'_i \textit{ e fazendo a média resulta:}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial (U_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\overline{u'_i u'_i u'_j}}{2} - \frac{\overline{u'_j p'}}{\rho} \right) - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

$$\textit{onde } P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \rightarrow (\textit{produção de } k)$$

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \rightarrow \textit{dissipação de } k$$

Equação modelada para *k*

$$\frac{Dk}{Dt} = \text{ Difusão de } k + \text{Produção de } k - \text{Dissipação de } k$$

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + \rho P_k - \rho \varepsilon$$

Onde σ_k é uma constante.

Equação de ε

$$Derivando\ a\ equação\ de\ Navier-Stokes\ com\ respeito\ a\ x_k,$$

$$multiplicando\ por\ 2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\ e\ fazendo\ a\ média:$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=-2\nu\left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}+\overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_i}\frac{\partial u'_k}{\partial x_j}}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-2\nu\,\overline{u'_k\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k\partial x_j}$$

$$-2\nu\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_i}{\partial x_m}\frac{\partial u'_k}{\partial x_m}}-2\nu^2\,\overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k\partial x_m}\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k\partial x_m}}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}-\nu\,\overline{u'_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_m}\frac{\partial u'_i}{\partial x_m}}-2\frac{\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial p'}{\partial x_m}\frac{\partial u'_j}{\partial x_m}}\right)$$

Equação modelada de ε (1)

Obviamente, mera inspeção visual permite concluir que a equação do *slide* anterior não serve para nada. Assim:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \quad \text{Difusão de } \varepsilon + \text{Produção de } \varepsilon - \text{Dissipação de } \varepsilon$$

Supomos que a produção de ε é proporcional à produção de k multiplicada por ε/k. O mesmo raciocínio é feito para a dissipação de ε.

Equação modelada de ε (2)

Resulta:

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho U_j\,\varepsilon)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}\right]+\rho C_1\frac{\varepsilon}{k}P_k-\rho C_2\frac{\varepsilon^2}{k}$$

Onde σ_ε , C_1 e C_2 são constantes.

Viscosidade Turbulenta (Eddy Viscosity)

μ_t é determinado por análise dimensional a partir das grandezas usadas para caracterizar a turbulência . Logo:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Onde C_μ é uma constante.

Modelo k-ε *standard*

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho U_j k)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]+\rho P_k-\rho\varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho U_j \varepsilon)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right]+\rho C_1\frac{\varepsilon}{k}P_k-\rho C_2\frac{\varepsilon^2}{k}$$

Onde : $P_k=-\overline{u_i{}'u_j{}'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ $\mu_t=\rho C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}$

Temos portanto cinco constantes: $C\mu$, σ_k, σ_ε, C_1 , C_2 .

Determinação das Constantes do Modelo **k-ε (1)**

Na camada logarítmica, para $30<y^+<400$, medidas de *k* permitem inferir que os efeitos de convecção e difusão são desprezíveis. A equação de *k* se reduz à igualdade entre produção e dissipação. Considerando que nessa região a única tensão turbulenta importante é $\overline{u'v'}$:

$$P_k = -\overline{u'v'}\frac{\partial U}{\partial y} = \varepsilon$$

$$mas,\ como\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\overline{u'v'}}{\nu_t} = \frac{\overline{u'v'}\,\varepsilon}{C_\mu k^2}\ ,\ resulta:$$

$$\left(\frac{\overline{u'v'}}{k}\right)^2 = C_\mu\ ;\ de\ medições\ \underline{\underline{C_\mu = 0.09}}$$

Determinação das Constantes do Modelo k-ε (2)

No escoamento á jusante de uma grade que provoque uniformidade do mesmo, a produção de turbulência se torna desprezível. Desprezando efeitos difusivos, as equações de k e ε ficam:

$$U\frac{\partial k}{\partial x} = -\varepsilon \qquad ; \qquad U\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -C_2\frac{\varepsilon^2}{k}$$

Medidas de k nesse caso sugerem que $k=\beta/x$, onde β é uma constante. Substituindo esse resultado nas equações acima, resulta:

$$\underline{\underline{C_2 \approx 2}}$$

Determinação das Constantes do Modelo k-ε (3)

Na camada logarítmica, temos:

$$U^{+} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(E\,y^{+}\right) \; onde \; U^{+} = \frac{U}{U^{*}} \; e \; y^{+} = \frac{\rho U^{*} y}{\mu}$$

$$U^{*} \text{ é a chamada velocidade de atrito}: \quad U^{*} = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}}$$

κ é a chamada constante de Von Kármán, κ=0.41, e E depende da rugosidade, E≈9.0 para parede lisa. Com a lei logarítmica obtemos:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U^{*}}{\kappa\, y}$$

Determinação das Constantes do Modelo k-ε (4)

Percebe-se também que, para $30 < y^+ < 400$, a tensão de Reynolds é constante e aproximadamente igual à tensão viscosa na parede. Da relação entre a tensão de Reynolds e k, derivada anteriormente da condição de equilíbrio local (produção de turbulência igual à dissipação):

$$\left(\frac{\overline{u'v'}}{k}\right)^2 = C_\mu \rightarrow k = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{C_\mu}} \rightarrow k = \frac{\tau_w / \rho}{\sqrt{C_\mu}} \rightarrow \underline{\underline{k = \frac{U^{*2}}{\sqrt{C_\mu}}}}$$

Determinação das Constantes do Modelo k-ε (5)

Voltando à condição de equilíbrio local na camada logarítmica:

$$\overline{u'v'}\frac{\partial U}{\partial y} = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = \varepsilon$$

$$mas,\ lembrando\ que\ \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}\ e\ que\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U^*}{\kappa\, y}\ ,$$

$$com\ o\ resultado\ obtido\ \ para\ k:$$

$$\underline{\underline{\varepsilon = \frac{U^{*3}}{\kappa\, y}}}$$

Determinação das Constantes do Modelo k-ε (6)

Voltando à camada logarítmica, considerando que o transporte convectivo e a difusão longitudinal são desprezíveis, e aplicando a condição de equilíbrio local entre produção e dissipação de turbulência, a equação de ε fica:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)+\left(C_1-C_2\right)\frac{\varepsilon^2}{k}=0$$

Substituindo as expressões obtidas nos dois últimos *slides* para k e ε, obtemos finalmente:

$$C_1 = C_2 - \frac{\kappa^2}{\sqrt{C_\mu}\,\sigma_\varepsilon}$$

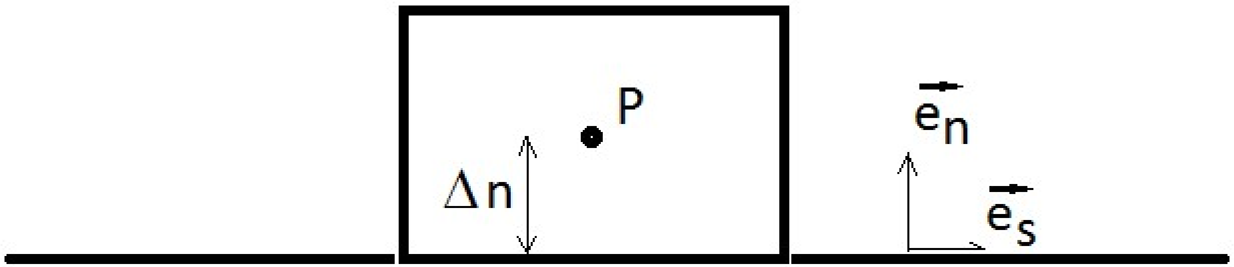
Determinação das Constantes do Modelo k-ε (7)

Alguns experimentos computacionais permitiram uma otimização do valor das constantes segundo a tabela:

C_μ	σ_k	σ_ε	C_1	C_2
0.09	1.0	1.3	1.44	1.92

Condições de Contorno

Finalmente, é preciso lembrar que o modelo k - ε *standard* não vale na sub-camada viscosa. É um modelo válido apenas para altos Re, onde Re = ν_t / ν. Assim, o nó mais próximo da parede deve ficar dentro da camada logarítmica, para $30 < y^+ < 400$ (idealmente, $30 < y^+ < 100$ a 200).



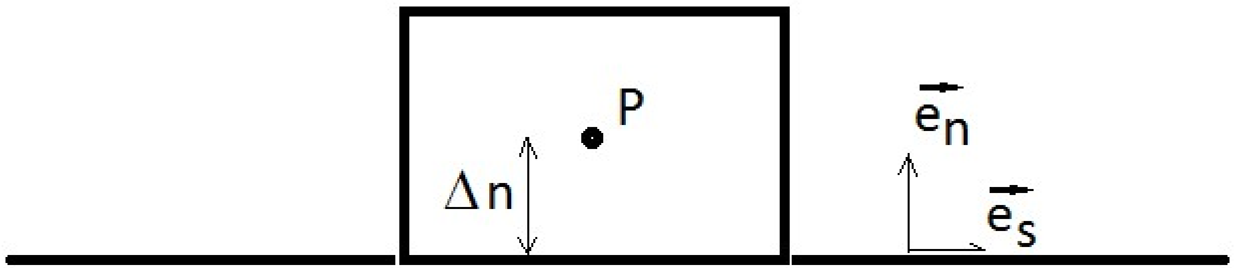
$$y^+ = \frac{U^* \Delta n}{\nu}$$

Condições de Contorno

Para a primeira célula nas imediações de uma parede, temos:

$$\nu_{wall} = \frac{U^{*2} \cdot \Delta n}{\left| \left(\vec{U}_P - \vec{U}_{wall} \right) \cdot \vec{e}_s \right|} \qquad \left. \frac{\partial k}{\partial n} \right|_{wall} = 0 \qquad \varepsilon_P = \frac{U^{*3}}{\kappa \Delta n}$$

Ou seja, calcula-se uma viscosidade efetiva na parede para que a tensão calculada pela diferença de velocidade seja igual à tensão resultante do perfil logarítmico. Usa-se uma condição de Neumann para a energia cinética devido ao efeito da subcamada viscosa.



Bibliografia

B. E. Launder, D. B. Spalding, "Lectures in Mathematical models of turbulence", Academic Press, 1972.

W. Rodi, "Turbulence models and their application in hydraulics", state-of-the-art paper, IAHR, 1980.

D. C. Wilcox, "Turbulence Modeling for CFD", 2nd Edition, DCW Industries, 2000.