MAT0315 - Introdução à Análise

Segundo Semestre de 2020
Período Diurno

Martha S. Monteiro

IME-USP

Aula 7 (24/09/2020)

O axioma do supremo e o conjunto dos números reais

Um corpo ordenado K satisfaz o *axioma do supremo* se para cada subconjunto $C \subset K$ não vazio e limitado superiormente existe $\sup C$ em K.

Teorema

Existe um corpo ordenado $\mathbb{R}$ que satisfaz o axioma do supremo. Além disso, $\mathbb{R}$ contém $\mathbb{Q}$ como subcorpo.

Algumas consequências do axioma do supremo

1. O conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.

   Demonstração:

   - Suponha, por absurdo, que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente.
   - Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é não vazio, $\mathbb{N}$ admite um supremo $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - Temos que $n \leq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$, pois α é um majorante de $\mathbb{N}$.
   - Logo, $n + 1 \leq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$, já que $n + 1 \in \mathbb{N}$.
   - Mas $n + 1 \leq \alpha \iff n \leq \alpha - 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
   - Logo, $\alpha - 1$ também é um majorante de $\mathbb{N}$.
   - Esse majorante é menor do que o supremo α, o que é uma contradição.

Algumas consequências do axioma do supremo

2. (Propriedade Arquimediana) Se x e y são números reais e $x > 0$, então existe pelo menos um número natural n tal que $nx > y$.

   Demonstração:

   - Suponha, por absurdo, que $nx \leq y$, para todo n natural.
   - Então o conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente.
   - A é não vazio, pois $x = 1 \cdot x$ pertence a A.
   - Logo, pelo axioma do supremo, existe um número real $s = \sup A$.
   - Como $x > 0$, temos que $s - x < s$.
   - Logo $s - x$ não é majorante de A.
   - Portanto, existe $mx \in A$ tal que $s - x < mx$, ou, equivalentemente, $s < (m+1)x$.
   - Como $m + 1$ é natural, $(m+1)x \in A$, o que contradiz o fato de s ser majorante de A.
   - Assim, a afirmação "$nx \leq y$ para todo n natural" é falsa e concluímos que existe um número natural n tal que $nx > y$.

Algumas consequências do axioma do supremo

3. Para cada $x > 0$ existe um natural n tal que $\dfrac{1}{n} < x$.

   Demonstração:

   Como $x > 0$, pela propriedade arquimediana, existe um número natural n tal que $nx > 1$.

4. Para todo real x existe um natural n tal que $n > x$.

   Demonstração:

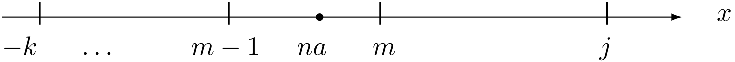
   Sabemos que $1 > 0$. Pela propriedade arquimediana, existe um natural n tal que $n \cdot 1 > x$.

Algumas consequências do axioma do supremo

5. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.

Demonstração:

- Como $b - a > 0$, existe um natural n tal que $n(b-a) > 1$.
- Além disso, existem naturais j e k tais que $j > na$ e $k > -na$.
- Portanto, $-k < na < j$.
- Logo, existe um inteiro m entre $-k$ e j, tal que $m - 1 \leq na < m$.



- Portanto $na < m \leq 1 + na < nb$.
- Como $n > 0$, das desigualdades acima concluímos que $a < \dfrac{m}{n} < b$.
Isso prova a proposição.

Intervalos

Se a e b são números reais tais que $a < b$, definimos

o intervalo fechado $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;

o intervalo aberto $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;

além dos intervalos

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \text{ e}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

O *comprimento* de qualquer um desses invervalos é, por definição, a diferença $b - a$.

Propriedade dos intervalos encaixantes

Teorema

Sejam $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$,..., $[a_n, b_n]$, ... intervalos fechados tais que

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

Então a intersecção de todos os intervalos é não vazia.

Se, além disso, o comprimento dos intervalos tender a zero conforme n cresce, ou seja se $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, então existe um único α pertencente a todos os intervalos, ou seja, $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{\alpha\}$.

Propriedade dos intervalos encaixantes (continuação)

Demonstração:

- Note que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq \ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1, \quad \forall n$.
- Considere $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$
- A é não vazio.
- A é limitado superiormente, pois b_1 é um majorante de A.
- Como $\mathbb{R}$ satisfaz o axioma do supremo, existe $\sup A = \alpha$.
- Logo $a_n \leq \alpha$, para todo n. (Por quê?...)
- Como $a_n < b_n$, para todo n, tem-se $\alpha \leq b_n, \forall n$. (Por quê?...)
- Portanto, $a_n \leq \alpha \leq b_n$ para todo n.
- Isso significa que $\alpha \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Logo, $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ é um conjunto não vazio.

Propriedade dos intervalos encaixantes (continuação)

<u>Demonstração</u> (continuação):

Falta provar que se $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ então α é o único número real pertencente à interseção de todos os intervalos.

- De fato, se $\beta \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, então $|\beta - \alpha| \leq (b_n - a_n), \forall n$.
- Fazendo n crescer indefinidamente, concluímos que $\beta = \alpha$.

Uma observação

A propriedade dos intervalos encaixantes e o axioma do supremo são equivalentes.

- Acabamos de provar a implicação

  (axioma do supremo) $\Rightarrow$ (propriedade dos intervalos encaixantes)

- É possível provar a implicação reversa, ou seja, que

  (propriedade dos intervalos encaixantes) $\Rightarrow$ (axioma do supremo)

Existência e unicidade de raízes

Os números $\sqrt{2}$ ou $\sqrt[3]{5}$, são definidos respectivamente como "o número cujo quadrado é 2" ou "o número cujo cubo é 5".

Mas há uma questão anterior a tais definições: esses números existem?

Nosso próximo objetivo é provar que vale o seguinte:

Teorema

Para todo número real $a > 0$ e todo natural n existe um único real $b > 0$ tal que $b^n = a$.

O número real b é chamado raiz n-ésima de a e é denotado por $\sqrt[n]{a}$.

Existência e unicidade de raízes (continuação)

Ideia da demonstração da existência:

1. Definimos o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x^n < a\}$
2. Mostramos que A é não vazio e limitado superiormente.
3. O axioma do supremo garante que existe um real $b = \sup A$.
4. Provamos que $b^n = a$.

Tanto o item 2 quanto o item 4 são bastante trabalhosos.

Aqui não faremos os detalhes dessa prova no caso geral.

Em vez disso, vamos considerar um caso particular.

Existência e unicidade da raiz quadrada de 2

Vamos fazer uma demonstração da existência e unicidade de $\sqrt{2}$ usando a propriedade dos intervalos encaixantes ao invés do axioma do supremo.

Teorema

Existe um único real $b > 0$ tal que $b^2 = 2$.

Demonstração da **unicidade**:

- Suponha que existam $x > 0$ e $y > 0$ tais que $x^2 = 2$ e $y^2 = 2$.
- Então $x^2 - y^2 = 0$, ou equivalentemente, $(x - y)(x + y) = 0$.
- Como x e y são ambos maiores do que 0, segue que $x = y$.

Demonstração da existência de $\sqrt{2}$

Vamos construir uma sequência de intervalos encaixantes assim:

1. Escolhemos $[a_1, b_1] = [1, 2]$.
    - Observe que $a_1^2 = 1^2 < 2$ e $b_1^2 = 2^2 > 2$.
    - Portanto, $a_1^2 < 2 < b_1^2$.

2. Para definir $[a_2, b_2]$, escolhemos $d_1 \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$ de modo que

$$a_2 = a_1 + \frac{d_1}{10} \qquad \text{e} \qquad b_2 = a_1 + \frac{d_1 + 1}{10}$$

satisfaçam $a_2^2 < 2$ e $b_2^2 > 2$ (ou seja, de modo que $a_2^2 < 2 < b_2^2$).

- Observe que $b_2 - a_2 = \dfrac{1}{10}$.
- Fazendo contas, determinamos $d_1 = 4$, pois, para esse valor de d_1,

$$a_2^2 = (1{,}4)^2 = 1{,}96 < 2 \quad \text{e} \quad b_2^2 = (1{,}5)^2 = 2{,}25 > 2$$

- Logo, $[a_2, b_2] = [1 + \frac{4}{10}, 1 + \frac{5}{10}]$.

Demonstração da existência de $\sqrt{2}$ (continuação)

3. Para definir $[a_3, b_3]$, escolhemos $d_2 \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$ de modo que

$$a_3 = a_2 + \frac{d_2}{100} \qquad \text{e} \qquad b_3 = a_2 + \frac{d_2 + 1}{100}$$

satisfaçam $a_3^2 < 2$ e $b_3^2 > 2$ (ou seja, de modo que $a_3^2 < 2 < b_3^2$).

- Observe que $b_3 - a_3 = 10^{-2}$
- Fazendo contas, determinamos $d_2 = 1$ pois, para esse valor de d_2,

$$a_3^2 = (1{,}41)^2 = 1{,}9881 < 2 \quad \text{e} \quad b_2^2 = (1{,}42)^2 = 2{,}0164 > 2$$

- Logo, $[a_3, b_3] = [1 + \frac{41}{10^2}, 1 + \frac{42}{10^2}]$.

4. De modo análogo, tendo definido $[a_n, b_n]$, de comprimento $b_n - a_n = 10^{-(n-1)}$, para definir $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ escolhemos $d_n \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$ de modo que

$$a_{n+1} = a_n + \frac{d_n}{10^n} \qquad \text{e} \qquad b_{n+1} = a_n + \frac{d_n + 1}{10^n}$$

satisfaçam $a_{n+1}^2 < 2 < b_{n+1}^2$.

Demonstração da existência de $\sqrt{2}$ (continuação)

5. Os intervalos são encaixantes, já que, por construção, para cada índice n vale:
   - $a_n \leq a_{n+1}$
   - $a_{n+1} < b_{n+1}$
   - $b_{n+1} \leq b_n$, pois

$$\begin{aligned} b_n - b_{n+1} &= b_n - \left[a_n + \frac{d_n+1}{10^n}\right] \\ &= (b_n - a_n) - \frac{d_n+1}{10^n} = \frac{1}{10^{n-1}}\left[1 - \frac{d_n+1}{10}\right] \geq 0 \end{aligned}$$

6. Como $b_n - a_n = 10^{-(n-1)}$, vale que $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Pelo teorema dos intervalos encaixantes, existe um único número real b que pertence à intersecção de todos os intervalos, isto é,

$$a_n \leq b \leq b_n, \quad \text{para todo } n$$

Demonstração da existência de $\sqrt{2}$ (continuação)

Agora só falta provarmos que $b^2 = 2$.

1. Note que $b > 0$. (Por quê?...)
2. Vale: $a_n^2 \leq b^2$ e $b^2 < b_n^2$ (Por quê?...)
3. Por outro lado, $a_n^2 < 2 < b_n^2$.
4. Os intervalos $[a_n^2, b_n^2]$ satisfazem a propriedade dos intervalos encaixantes, e $\lim b_n^2 - a_n^2 = 0$.
5. Portanto, a intersecção $\bigcap [a_n^2, b_n^2]$ contém um <u>único</u> número real.
6. Como b^2 e 2 estão nessa intersecção (itens 2 e 3, acima), concluímos que $b^2 = 2$.

Corolário

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a > 0$ e $b > 0$. Então $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Demonstração:

Sabemos que as raízes $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ existem, já que a, b e ab são números positivos. Temos:

- $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})(\sqrt{a}\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$
- Como $\sqrt{ab}$ é o único real positivo cujo quadrado é ab, concluímos que $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Relação entre números reais e decimais

Dada uma expansão decimal infinita da forma

$$n_0, d_1 d_2 d_3 \ldots$$

considere o conjunto de números racionais

$$E = \left\{ n_0 + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_k}{10^k} \; : k = 1, 2, \ldots \right\}$$

- E é não vazio e é limitado superiormente (por $n_0 + 1$, por exemplo).
- Logo, existe $\sup E \in \mathbb{R}$.

Portanto, dada uma expansão decimal infinita, sempre existe um número real $x = \sup E$ com essa expansão.