Pares ordenados e produto cartesiano

- Todos vocês já devem ter visto:

  - conjunto $\{a,b\}$ ⇝ a ordem não importa
  - par ordenado (a,b) ⇝ a ordem importa, se $a \neq b$, temos que $(a,b) \neq (b,a)$.

- Problema: Como definir (a,b) usando conjuntos?

(Lembre que na Teoria dos Conjuntos queremos definir/construir todos os "objetos matemáticos" usando conjuntos)

- A propriedade básica qu queremos que um par ordenado tenha é: $(a,b) = (a',b') \Rightarrow a=a'$ e $b=b'$.

Precisamos definir (a,b) de modo que essa propriedade esteja satisfeita:

Def: Definimos o par ordenado (a,b) por

$$\boxed{(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}}$$

Prop: $(a,b) = (a',b') \Rightarrow a=a'$ e $b=b'$.

Dem: Se $a=b$, então $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}$. Mas daí

$(a,b) = \{\{a\}\} = \{\{a'\},\{a',b'\}\} \Rightarrow a = a' = b'$.

Se $a \neq b$, então $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a'\},\{a',b'\}\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{a\} = \{a'\} \Rightarrow a = a' \\ \{a,b\} = \{a',b'\} \underset{a=a'}{\Rightarrow} b = b' \end{cases}$$

//

- A proposição mostra que a definição dada tem a propriedade que queremos. Poderíamos definir (a,b) de outra forma (veja exercício 4 de TIC3). Na "prática", a propriedade, mostrada na proposição, é o que de fato usamos, é o que é importante. A definição serve para fundamentar dentro da Teoria dos Conjuntos.

- Tendo a definição de par ordenado, podemos agora definir:

Produto Cartesiano

- Se A e B são conjuntos, definimos:

Def: $A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$ (produto cartesiano de A e B) (par)

Exemplos:
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (plano cartesiano)
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,m) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$
- $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2,3\}$ $\quad A \times B = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (1,3)\}$

Notação: $X \times X = X^2$

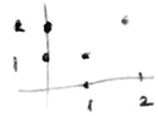
Obs: $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$ (fica como exercício mostrarem)

Logo $A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ (também exercício).

Como $(a,b) \neq (b,a)$ se $a \neq b$, não é difícil perceber que:

Obs: $A \times B \neq B \times A$ (construam exemplos)

Pergunta: $X \subset A \times B \Rightarrow X$ pode ser escrito como produto cartesiano de dois conjuntos? (isto é $\exists A' \subset A$ e $B' \subset B$ tal que $X = A' \times B'$)

Resp: Não!! Esse é um dos erros mais comuns! Quando tomamos $X \subset A \times B$ qualquer não podemos supor que $X = A' \times B'$! (tentem achar alguns...)
É fácil acharem exemplos!
Um exemplo:  $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2\}$ e $X = \{(1,1),(2,2)\}$

Tendo definido (a,b) e $A \times B$, pode-se agora definir:

Def: $(a,b,c) = ((a,b),c)$ e
$A \times B \times C = \{(a,b,c) : a \in A$ e $b \in B$ e $c \in C\}$

Prop: $(a,b,c) = (a',b',c') \Rightarrow a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$

Obs: Pode-se definir (a,b,c) de outras maneiras.
Pode generalizar e definir n-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e produto cartesiano finito qualquer.

Para propriedades e exercícios: ir agora para TIC 3 (no edisciplinas)
(principalmente ex 5 e 6.