MAP 2321 - Técnicas em Teoria de Controle

Equações diferenciais lineares
Fórmula da variação das constantes[1]

Depto. Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
São Paulo – SP

[1] R. Brockett.

Equações diferenciais lineares não homogêneas

Agora consideramos sistemas lineares de primeira ordem e **não** homogêneos

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t) \tag{1}$$

em que

1. $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$.
2. $A : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz cujos coeficientes $A_{ij}(t)$ são funções contínuas.
3. $f(t) \in \mathbb{R}^n$ é muitas vezes chamado de termo **forçante**.

Fórmula da variação das constantes

Inicialmente recordamos que as soluções $u \in \mathbb{R}^n$ de sistemas **algébricos** tais como

$$Lu = b$$

para $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ podem ser **escritos** como

$$u = u_1 + u_2$$

com u_1 pertencente ao núcleo de L denotado por $\ker(L)$ e u_2 uma solução **particular**.

Reescreva (1) como

$$\left(\frac{d}{dt} - A(t)\right) x(t) = f(t)$$

Note que **já** conhecemos o núcleo de $\left(\frac{d}{dt} - A(t)\right)$. São dados por

$$\Phi(t, t_0)x_0 \quad \text{assumindo} \quad x(t_0) = x_0$$

onde Φ é a matriz de **transição** de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

- Agora **basta** encontrarmos uma solução particular para termos um **candidato**.

Veja que se $A(t) \equiv 0$ uma solução particular é facilmente **encontrada**:

$$\dot{x}(t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

pelo Teorema Fundamental do **Cálculo**. Considere então a seguinte mudança[2]

$$z(t) = \Phi(t, t_0)^{-1} x(t)$$

Afirmação

$$\dot{z}(t) = \Phi(t, t_0)^{-1} f(t) \tag{2}$$

logo

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(s, t_0)^{-1} f(s)\, ds.$$

Assim, como $\Phi(t, t_0)\Phi(s, t_0)^{-1} = \Phi(t, s)$ obtemos **que**

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_0) z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, t_0)\Phi(s, t_0)^{-1} f(s)\, ds \\ &= \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s) f(s)\, ds. \end{aligned}$$

[2]Lembre-se que Φ é **invertível** pelo Teorema de Abel-Jacobi-Liouville.

Teorema

Se $\Phi(t,t_0)$ é a matriz de transição de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, então a **única** solução de (1) com **condição inicial** $x(t_0) = x_0$ é

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)f(s)\,ds. \tag{3}$$

Proof. Para concluirmos a **existência** basta mostrarmos a afirmação anterior (2). Inicialmente, observe que $\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0) = I$ nos dá

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\Big(\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0)\Big) &= \dot{\Phi}(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0) + \Phi(t,t_0)\frac{d}{dt}\Phi^{-1}(t,t_0) \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\Phi^{-1}(t,t_0) = -\Phi^{-1}(t,t_0)\dot{\Phi}(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0) &= -\Phi^{-1}(t,t_0)A(t)\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0) \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\Phi^{-1}(t,t_0) &= -\Phi^{-1}(t,t_0)\,A(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1}(t,t_0)\,x(t)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1}(t,t_0)\right)x(t) + \Phi^{-1}(t,t_0)\,\dot{x}(t) \\
&= -\Phi^{-1}(t,t_0)A(t)x(t) + \Phi^{-1}(t,t_0)\Big(A(t)x(t) + f(t)\Big) \\
&= \Phi^{-1}(t,t_0)f(t)
\end{aligned}
$$

provando a afirmação e assim a existência de solução.
Vejamos agora a **unicidade**. Sejam x_1 e x_2 soluções de (1) com $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0$. Então

$$
\frac{d}{dt}(x_1(t) - x_2(t)) = A(t)(x_1(t) - x_2(t)) \quad \text{com } \ x_1(t_0) - x_2(t_0) = 0.
$$

Isto é, $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$ **satisfaz** o sistema linear $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ com condição inicial **nula**. Portanto, $z(t) \equiv 0$ pela unicidade de solução do problema **linear** implicando

$$
x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t.
$$

$\square$

Segunda lei de Newton

Seja $x(t)$ a **posição** de um corpo de massa m num instante t sujeito a uma **força** f. Então

$$m\ddot{x}(t) = f(t)$$

x é a **saída** do sistema e f pode ser visto como controle. Definimos as variáveis de estado $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = \dot{x}(t)$ obtendo o seguinte sistema de **controle**

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} f.$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A matriz de **transição** do sistema é

$$
\begin{aligned}
e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(t-t_0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(t-t_0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & (t-t_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

já que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$. Aplicando a **fórmula** da variação das constantes (3) temos

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & (t-t_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} 1 & (t-s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} f(s)ds \\
&= \begin{pmatrix} x_1(t_0) + (t-t_0)x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)}{m}(t-s)\,ds \\ x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)}{m}\,ds \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

que nos dá como **saída** do sistema

$$
x(t) = x(t_0) + (t-t_0)\dot{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)}{m}(t-s)\,ds.
$$

Caso particular

Se aplicamos uma força **periódica** $f(t) = \sin t$ e assumimos massa unitária $m = 1$ e $t_0 = 0$ temos

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + (t-0)\dot{x}(0) + \int_0^t (\sin s)\,(t-s)\,ds \\ &= x(0) + t\dot{x}(0) - t\left(\cos s\Big|_0^t\right) - \left(-s\cos s\Big|_0^t + \int_0^t \cos s\,ds\right) \\ &= x(0) + t\dot{x}(0) + [t\,(1-\cos t) + t\cos t - \sin t] \\ &= x(0) + t\,(\dot{x}(0) + 1) - \sin t \end{aligned}$$

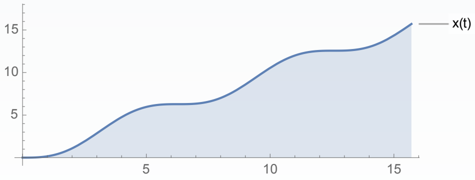

Figura: Aqui assumimos $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Agora podemos **analisar** de maneira mais precisa sistemas de controle como

Sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases}.$$

Se **conhecemos** as funções A, B e C, dado a entrada/controle u, podemos calcular a solução de **estado** x através da *fórmula de variação das constantes* aplica à primeira equação com condição **inicial** conhecica. Em seguida, determinamos a **saída** pela segunda equação resolvendo o sistema.

- Em seguida discutiremos equações **adjuntas** de sistemas lineares homogêneos. Tais equações são **úteis** para caracterizar controlabilidade e observabilidade de sistemas autônomos e não **autônomos**.

Definição: Seja x a solução de uma equação diferencial linear **homogênea** definida num espaço com produto **interno**. Dizemos que uma equação diferencial linear e homogênea em p definida no mesmo espaço é a **equação adjunta** da equação dada em x, se para **qualquer** condição inicial dada temos que o produto interno das soluções x e p é constante.

Teorema

A equação adjunta associada a $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ é $\dot{p}(t) = -A'(t)p(t)$.

Prova. Sejam x e p soluções das respectivas equações. Então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(p'(t)x(t)\right) &= \dot{p}'(t)x(t) + p'(t)\dot{x}(t) = (-A'(t)p(t))'x(t) + p'(t)A(t)x(t) \\ &= -p'(t)A(t)x(t) + p'(t)A(t)x(t) = 0.\end{aligned}$$

$\square$

Molas em paralelo

A equação do **sistema mecânico** ao lado é

$$m\ddot{x} + k_e x = F$$

onde m é a **massa** do corpo, F uma força externa e $k_e = k_1 + k_2$ a **constante elástica**.

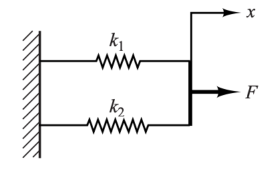

Figura: Duas molas em paralelo.

Utilizando as variáveis de **estado** $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = \dot{x}(t)$ sabemos que

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_e/m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} F$$

Molas em paralelo

A equação do **sistema mecânico** ao lado é

$$m\ddot{x} + k_e x = F$$

onde m é a **massa** do corpo, F uma força externa e $k_e = k_1 + k_2$ a **constante elástica**.

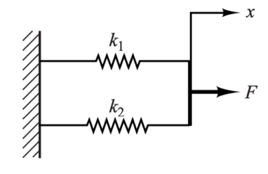

Figura: Duas molas em paralelo.

Se a força **externa** $F \equiv 0$ temos a equação linear homogênea

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_e/m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

cuja equação **adjunta** é

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -k_e/m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Vimos em (4) que a **inversa** $\Phi^{-1}(t, t_0)$ da matriz de transição $\Phi(t, t_0)$ de um sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\frac{d}{dt}\Phi^{-1}(t, t_0) = -\Phi^{-1}(t, t_0)\, A(t).$$

Como a **derivada** da transposta de uma matriz é a transposta de sua derivada temos

$$\frac{d}{dt}\left[\Phi^{-1}(t, t_0)\right]' = -\left[\Phi^{-1}(t, t_0)\, A(t)\right]' = -A'(t)\left[\Phi^{-1}(t, t_0)\right]'$$

o que prova o **seguinte** teorema

Teorema

Seja Φ a matriz de transição de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Então

$$\Phi'(t_0, t) = \left[\Phi^{-1}(t, t_0)\right]'$$

é a matriz de transição de sua adjunta $\dot{p}(t) = -A'(t)p(t)$.

Dizemos que $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ é uma equação **auto-adjunta** se $A(t) = -A'(t)\ \forall t$.

Exemplo

O oscilador **harmônico** dado por[a]

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0$$

é auto-adjunto.

[a] Constante elástica $k = 1$ e sem forças externas.

Definindo as variáveis de **estado** $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = \dot{x}(t)$ obtemos

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) = x_2(t) \quad \text{e} \quad \dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = -x_1(t)$$

que nos dá

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Note que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **satisfaz** $A = -A'$.

Veremos que as matrizes de transição de uma equação auto-adjunta são ortogonais[3].

Teorema

Se $\Phi(t, t_0)$ é a matriz de transição de um sistema **auto-adjunto**, então

$$\Phi'(t, t_0)\Phi(t, t_0) = I \quad \forall t \text{ e } t_0.$$

Prova. Veja que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\Phi'(t, t_0)\Phi(t, t_0)\right] &= \left[\dot{\Phi}(t, t_0)\right]'\Phi(t, t_0) + \Phi'(t, t_0)\dot{\Phi}(t, t_0) \\ &= \Phi'(t, t_0)A'(t)\Phi(t, t_0) + \Phi'(t, t_0)A(t)\Phi(t, t_0) \\ &= \Phi'(t, t_0)\left(A'(t) + A(t)\right)\Phi(t, t_0) = 0 \end{aligned}$$

já que $A(t) = -A'(t)$. Logo, $\Phi'(t, t_0)\Phi(t, t_0)$ é **constante**. Como

$$\Phi'(t_0, t_0)\Phi(t_0, t_0) = I$$

concluímos a prova do teorema. □

[3] $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonal se satisfaz $AA' = I$.

1. O adjunto de transformações lineares

Sejam $L : X \mapsto Y$ uma **transformação** linear entre espaços X e Y com produto interno $(\cdot,\cdot)_X$ e $(\cdot,\cdot)_Y$ respectivamente. Dizemos que uma transformação linear $T : Y \mapsto X$ é o **adjunto** de L se $(y, L(x))_Y = (T(y), x)_X$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

a) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Mostre que o adjunto de A é sua **transposta** $A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$.[a]

b) Seja $\mathcal{C}^m[t_0, t_1]$ o espaço das funções vetoriais **contínuas** $x : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^m$. Inicialmente verifique que

$$(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} x'(t)y(t)\, dt$$

define um produto interno em $\mathcal{C}^m[t_0, t_1]$. Em seguida, veja que a transformação T abaixo está bem definida e calcule o seu **adjunto**

$$T : \mathcal{C}^m[t_0, t_1] \mapsto \mathcal{C}^m[t_0, t_1] : f \mapsto \int_{t_0}^{t_1} J(t, s)f(s)\, ds$$

em que $J : [t_0, t_1]^2 \mapsto \mathbb{R}^{m\times m}$ é uma função **matricial** contínua.

[a] Recordamos que o produto interno em $\mathbb{R}^n$ é igual a $x'y = x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ para $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2. O comutador

O **comutador** de $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é definido por $[A, B] = AB - BA \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

i) Verifique que $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ comutam, se só se $[A, B] = 0$.

ii) Mostre a identidade de **Jacobi-Bracket**

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

3.

Seja $\Phi(t, t_0)$ a matriz de transição da equação $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Mostre que se $A(t) = -A'(-t)$, então $\Phi(t, t_0)$ e sua **inversa** possuem os mesmos autovalores.

4. Um circuito LCR

a) Encontre uma equação diferencial que **modele** o sistema elétrico ao lado assumindo que e_i é a **entrada** e e_0 é a **saída** do sistema.

b) Determine a **solução** da equação obtida no item $a)$ com condição inicial dada.

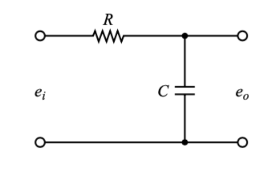

Figura: e_i e e_0 denotam tensões, R e C resistência e capacitância resp/te.

5.

Mostre que se v é um **autovetor** de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ associado a λ, então v é um autovetor de e^A associado ao autovalor e^λ.

6. Forced, damped, harmonic oscillator

Sejam k e $b > 0$. Considere o oscilador **harmônico** dado pela seguinte equação

$$\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \cos t.$$

a) Escreva a equação de **estado** deste sistema e encontre sua solução para qualquer condição inicial dada.

b) Seja $\Phi(t, t_0)$ a matriz de **transição** deste sistema. Mostre que

$$\lim_{t \to +\infty} \Phi(t, t_0) = 0.$$

c) Prove que existe uma única solução 2π**-periódica** $\varphi_{2\pi}(t)$ para este sistema.

d) Mostre que a solução 2π-periódica do item c) é **atratora**, ie., se $x(t)$ é solução, então $\|x(t) - \varphi_{2\pi}(t)\| \to 0$ quando $t \to +\infty$.