

MAT 0147: Cálculo II (T21-FEA-USP)

Superfícies

Guia resumido
(Prof. M. Alexandrino)

Setembro 2020

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. O GeoGebra <http://www.geogebra.org> (aqui utilizado) é uma ótima ferramenta, porém o aluno deve também tentar fazer as figuras na mão para compreendê-las melhor.

Objetivo: Estudar superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Elas aparecerão no curso como:

- ▶ superfícies de nível (e.g. gráficos, vínculos etc)
- ▶ superfícies parametrizadas.

Superfície de nível

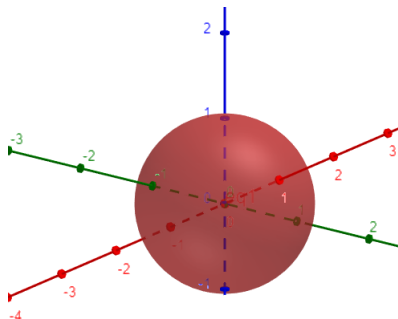
Def: Seja $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua e c um valor de g .
Então

$$S = g^{-1}(c) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | g(x_1, x_2, x_3) = c\}$$

é chamado **superfície de nível** (ou conjunto de nível).

Ex 1: Seja $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$



Obs: Uma superfície de nível de uma função contínua $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ não precisa ser uma *superfície regular*; veremos maiores detalhes na Parte 2 da matéria quando estudarmos o teorema de função implícita. Considere por exemplo:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$$

Ex de supefícies de nível: *Gráficos*

O gráficos associado a uma função $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua é

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = h(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in U\}$$

Ex 2: $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ onde $h(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1^2 - x_2^2, (x_1, x_2) \in U\}$$

Note que $C = \{(x_1, x_2, 2) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 = \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2}\} = S \cap \{x_3 = 2\}$ é a translação de um hiperboloide (vide Resumo 3).

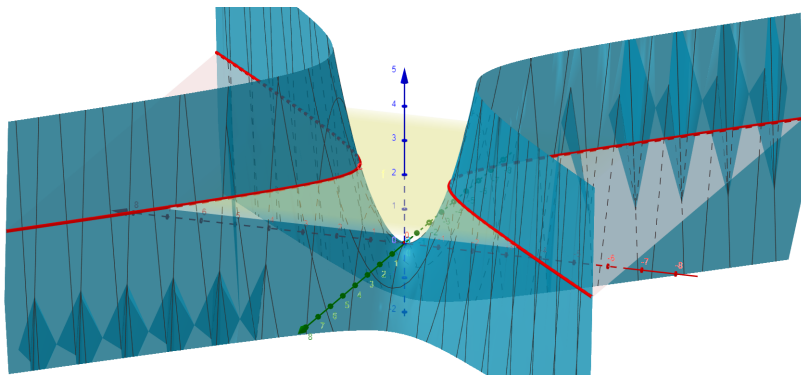


Figura: Exemplo 2

Ex 3 A superfície

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, (x_1, x_2) \in U\}$$

é gráfico.

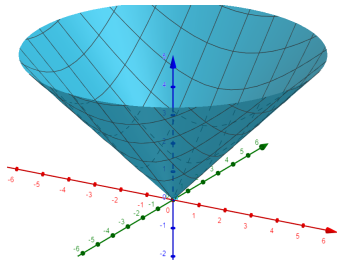


Figura: Exemplo 3

Obs A superfície

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3^2 = x_1^2 + x_2^2, (x_1, x_2) \in U\}$$

não é gráfico pois não conseguimos descrever todos os pontos de S como $x_3 = h(x_1, x_2)$ para uma **única** função h .

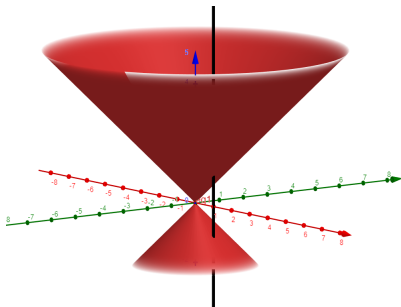


Figura: Não é gráfico, em particular retas paralelas ao eixo x_3 intersectam a superfície em mais de um ponto

Ex de superfícies de nível: *Superfície de Revolução*

Problema

Considere a aplicação linear $R_\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como:

$$R_\theta(x) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Verifique que $R_\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma rotação em torno do eixo x_3 ou seja em torno da reta $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$.

Uma superfície S é **superfície de revolução** (em torno do eixo x_3) se é invariante pela rotações R_θ ou seja $S = R_\theta(S)$ para todo θ .

Obs: Ex 1 e Ex 3 são superfícies de revolução, o Ex 2 não é de revolução.

Em geral uma superfície de **revolução** pode ser descrita como superfície de nível:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x_1^2 + x_2^2, x_3) = c\}$$

para alguma função $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Prob: Verifique que uma superfície descrita pela equação acima atende: $R_\theta(S) \subset S$.

Ex 4 $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \cos(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})\}$

Vamos verificar se S é de revolução e esboçar S

- (1) Começamos com a igualdade que define S , i.e.,
 $x_3 = \cos(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$;
- (2) Substituímos $R^2 = x_1^2 + x_2^2$ na igualdade, i.e., $x_3 = \cos(R)$
- (3) **Visto que as únicas variáveis foram R e x_3 então S é de revolução,**
- (4) Vamos então descobrir a **curva geratriz** definida como
 $C = S \cap \{x_1 = 0\}$ ou seja
 $C = \{(0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \cos(|x_2|)\}$;
- (5) Giramos a curva geratriz C em torno do eixo x_3 obtendo a superfície S .

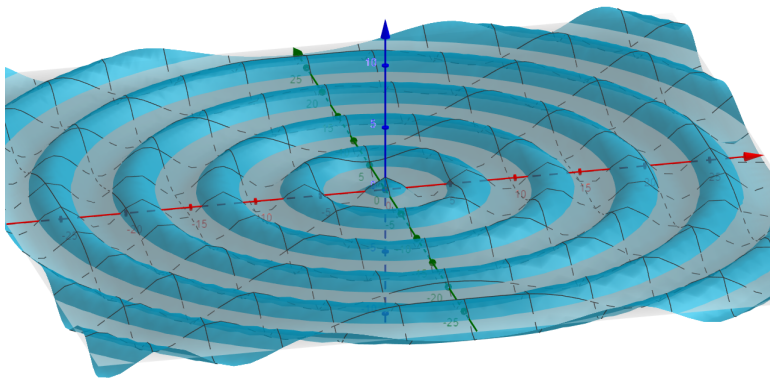


Figura: Ex 4

Ex de superfícies de nível: *Cilindro sobre curvas*

Considere a aplicação translação $T_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $T_t(x) = x + (0, 0, t)$

Uma superfície S será um **cilindro sobre curva no plano** $\{x_3 = 0\}$ se for invariante pela translação T_t ou seja $T_t(S) = S$.

Em geral tal superfície é definida como o conjunto de nível

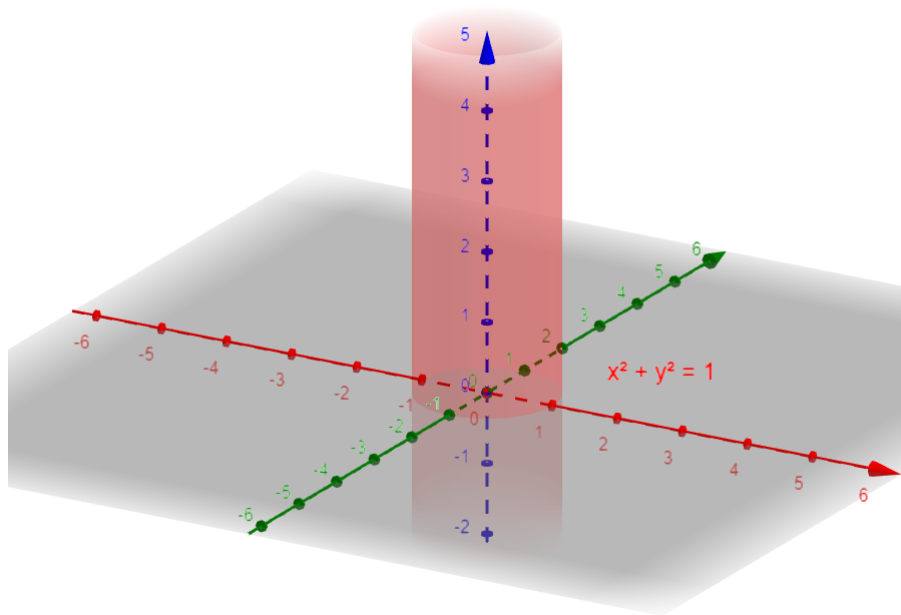
$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | g(x_1, x_2) = c\}$$

onde $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Ex 5: $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

Vamos verificar que S é cilindro sobre curva e esboçar S

- (1) Começamos com a igualdade que define S , ou seja $x_1^2 + x_2^2 = 1$;
- (2) **Visto que faltou a variável x_3 então é cilindro sobre curva .**
- (3) Consideramos a curva $C = S \cap \{x_3 = 0\}$ e trasladamos na direção x_3



Ex de superfícies de nível: *Deformação*

Considere a deformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como:

$$T(x) = (ax_1, bx_2, cx_3) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dado uma superfície

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x_1, x_2, x_3) = d\}$$

sua **deformação** será descrita como:

$$T(S) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid g\left(\frac{y_1}{a}, \frac{y_2}{b}, \frac{y_3}{c}\right) = d\}$$

Ex 6: Considere:

- ▶ $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$
- ▶ $T(S) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} + y_3^2 = 1\}$

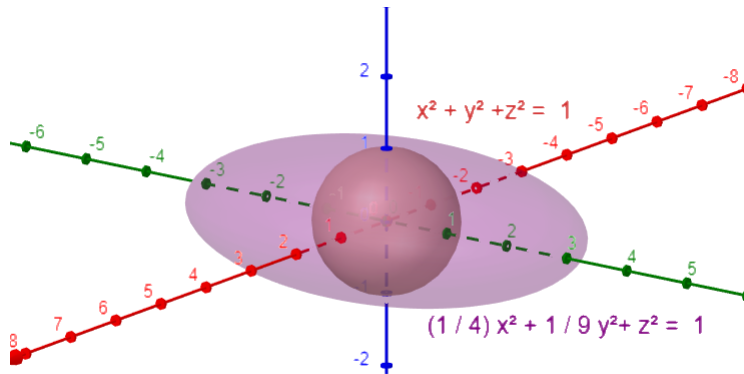


Figura: Ex 6

Exemplos de Parametrizações de superfícies

Dada uma superfície S , uma aplicação $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma **parametrização** de S se $\psi(U) \subset S$.

Ex Gráficos: Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = h(x_1, x_2)\}$ onde $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Então $\psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, h(x_1, x_2))$ é uma parametrização.

Ex Cilindro canônico: Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 4\}$ Então $\psi(\theta, z) = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), z)$ é uma parametrização.

Obs: O último exemplo sugere parametrizações mais gerais para:

- ▶ cilindro sobre curvas planas;
- ▶ superfícies de revolução.

Ex cilindro sobre curvas: Seja S uma superfície *cilindro sobre curvas* onde $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma parametrização da curva plana $C = S \cap \{x_3 = 0\}$. Então $\psi(t, x_3) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), x_3)$ é uma parametrização.

Ex particular:

- ▶ Se $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1\}$
- ▶ $\alpha(t) = (2 \cos(t), 3 \sin(t))$
- ▶ $\psi(t, x_3) = (2 \cos(t), 3 \sin(t), x_3)$

Ex superfície de revolução: Seja S uma *superfície de revolução* onde $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização da curva geratriz $C = S \cap \{x_1 = 0\}$. Observe que

- ▶ $\alpha(t) = (0, \alpha_2(t), \alpha_3(t))$,
- ▶ $\alpha_2(t)$ mede a distância ao eixo x_3
- ▶ $\alpha_3(t)$ mede a altura do ponto $\alpha(t)$

Então $\psi(t, \theta) = (\alpha_2(t) \cos(\theta), \alpha_2(t) \sin(\theta), \alpha_3(t))$ é uma parametrização de S .

Ex particular:

- ▶ Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$
- ▶ $\alpha(t) = (0, \sin(t), \cos(t))$
- ▶ $\psi(t, \theta) = (\sin(t) \cos(\theta), \sin(t) \sin(\theta), \cos(t))$

Obs: Curvas espaciais em $\mathbb{R}^3$

Prob: Sejam

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1 + x_2\}$$

(a) Esboce S_1 e S_2 .

(b) Determine a parametrização de $C = S_1 \cap S_2$.

Dica b: Primeiro determine a equação cartesiana da projeção $\pi(C)$ no $\{x_3 = 0\}$, segundo determine a parametrização $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ da curva plana $\pi(C)$ e por fim obtenha a coordenada α_3 usando $x_3 = 1 + x_2$

Resposta (b) $\alpha(t) = (t, \frac{t^2-1}{2}, \frac{t^2+1}{2})$ para $t \in \mathbb{R}$.