

**MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS II**

2º Semestre - 2020

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

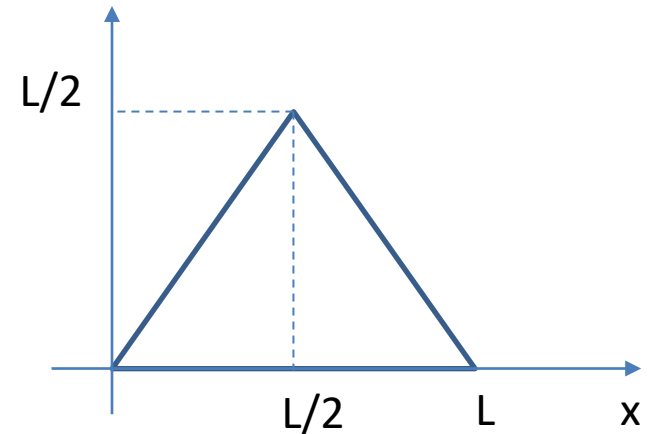
Problema: Encontrar solução para a EDP com as condições de contorno homogêneas:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2 \end{cases}$$

Ou seja: $T_1 = T_2 = 0$, e $\alpha = 1$

A condição inicial é dada pela relação:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < L/2 \\ L - x, & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$



A solução obtida por separação de variáveis é dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Os coeficientes da solução são os coeficientes da série de senos da condição inicial pois:

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Como a tabela contém os coeficientes para funções polinomiais até ordem 2 não há necessidade de integrar.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < L/2 \\ L - x, & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$c_n = 2 * \left[b_n \left(f_{0,1/2}^{(1)}, L \right) + L * b_n \left(f_{1/2,1}^{(0)}, L \right) - b_n \left(f_{1/2,1}^{(1)}, L \right) \right]$$

Série de
senos

Linear no
intervalo $[0, 1/2]$

constante no
intervalo $[1/2, 1]$

Linear no
intervalo $[1/2, 1]$

Extraindo as expressões necessárias da tabela:

$$b_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi} \cos s \Big|_{n\pi c}^{n\pi d}$$

$$b_n(f_{c,d}^{(1)}, L) = \frac{L}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \sin s) \Big|_{n\pi c}^{n\pi d}$$

$$b_n(f_{0,1/2}^{(1)}, L) = \frac{L}{n^2\pi^2} \left[-\frac{n\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2} + 0 \cdot \cos 0 - \sin 0 \right] = \frac{L}{n^2\pi^2} \left[-\frac{n\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2} \right]$$

$$b_n(f_{1/2,1}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi} \left[\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right]$$

$$b_n(f_{1/2,1}^{(1)}, L) = \frac{L}{n^2\pi^2} \left[-n\pi \cdot \cos n\pi + \sin n\pi + \frac{n\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{2} \right]$$

Combinando na expressão para o coeficiente:

$$c_n = 2 * \left[b_n(f_{0,1/2}^{(1)}, L) + L * b_n(f_{1/2,1}^{(0)}, L) - b_n(f_{1/2,1}^{(1)}, L) \right]$$

$$c_n = 2 * \left[b_n \left(f_{0,1/2}^{(1)}, L \right) + L * b_n \left(f_{1/2,1}^{(0)}, L \right) - b_n \left(f_{1/2,1}^{(1)}, L \right) \right]$$

$$c_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} \left[-\frac{n\pi}{2} * \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2} \right] - \frac{2L}{n\pi} \left[\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right] \\ - \frac{2L}{n^2\pi^2} \left[-n\pi * \cos n\pi + \frac{n\pi}{2} * \cos \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{2} \right]$$

Agrupando pelos termos trigonométricos:

$$c_n = \left[\frac{2L}{n^2\pi^2} * -\frac{n\pi}{2} + \frac{2L}{n\pi} - \frac{L}{n^2\pi^2} * \frac{n\pi}{2} \right] \cos \frac{n\pi}{2} \\ + \left[\frac{2L}{n^2\pi^2} + \frac{2L}{n^2\pi^2} \right] \sin \frac{n\pi}{2} \\ + \left[-\frac{2L}{n\pi} - \frac{2L}{n^2\pi^2} * -n\pi \right] \cos n\pi$$

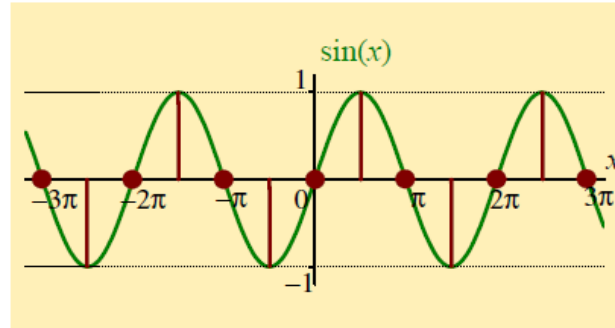
Resulta em:

$$\begin{aligned}
 c_n = & \left[\frac{2L}{n^2\pi^2} * -\frac{n\pi}{2} - \frac{L}{n^2\pi^2} * \frac{n\pi}{2} + \frac{2L}{n\pi} \right] \cos \frac{n\pi}{2} \\
 & + \left[\frac{2L}{n^2\pi^2} + \frac{2L}{n^2\pi^2} \right] \sin \frac{n\pi}{2} \\
 & + \left[-\frac{2L}{n\pi} - \frac{2L}{n^2\pi^2} * -n\pi \right] \cos n\pi
 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$c_n = \left[\frac{4L}{n^2\pi^2} \right] \sin \frac{n\pi}{2} = \left[\frac{4L}{\pi^2} \right] * \left[\frac{1}{n^2} \right] \sin \frac{n\pi}{2}$$

Para valores pares de n , o coeficiente é nulo:



$$\bullet \sin n \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & , n \text{ even} \\ 1 & , n = 1, 5, 9, \dots \\ -1 & , n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

Logo pode-se propor uma mudança de variáveis para evitar o cálculo de termos nulos:

$$n = (2k + 1), k = 0, \dots, \infty$$

$$c_{(2k+1)} = \left[\frac{4L}{\pi^2} \right] * \left[\frac{(-1)^k}{(2k + 1)^2} \right]$$

Para k par o coeficiente é positivo igual a 1, e para k ímpar é negativo igual a -1.

Ou seja a solução:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Pode ser escrita na forma:

$$u(x, t) = \left[\frac{4L}{\pi^2} \right] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} \right] * \sin \frac{n\pi}{2} * \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Usando a mudança de variáveis:

$$u(x, t) = \left[\frac{4L}{\pi^2} \right] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right] \sin \frac{(2k+1)\pi x}{L} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{L^2} t}$$

A referência traz o mesmo processo para o valor de $L = 40$

Portanto a solução do problema é

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{1600} t} \\ &= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{1600} t} \end{aligned}$$

Entretanto coeficientes de índice par são nulos:

$$c_{2k} = 0$$

$$c_{2k+1} = \frac{160(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Portanto a solução do problema é

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600} t} \\ &= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600} t} \end{aligned}$$

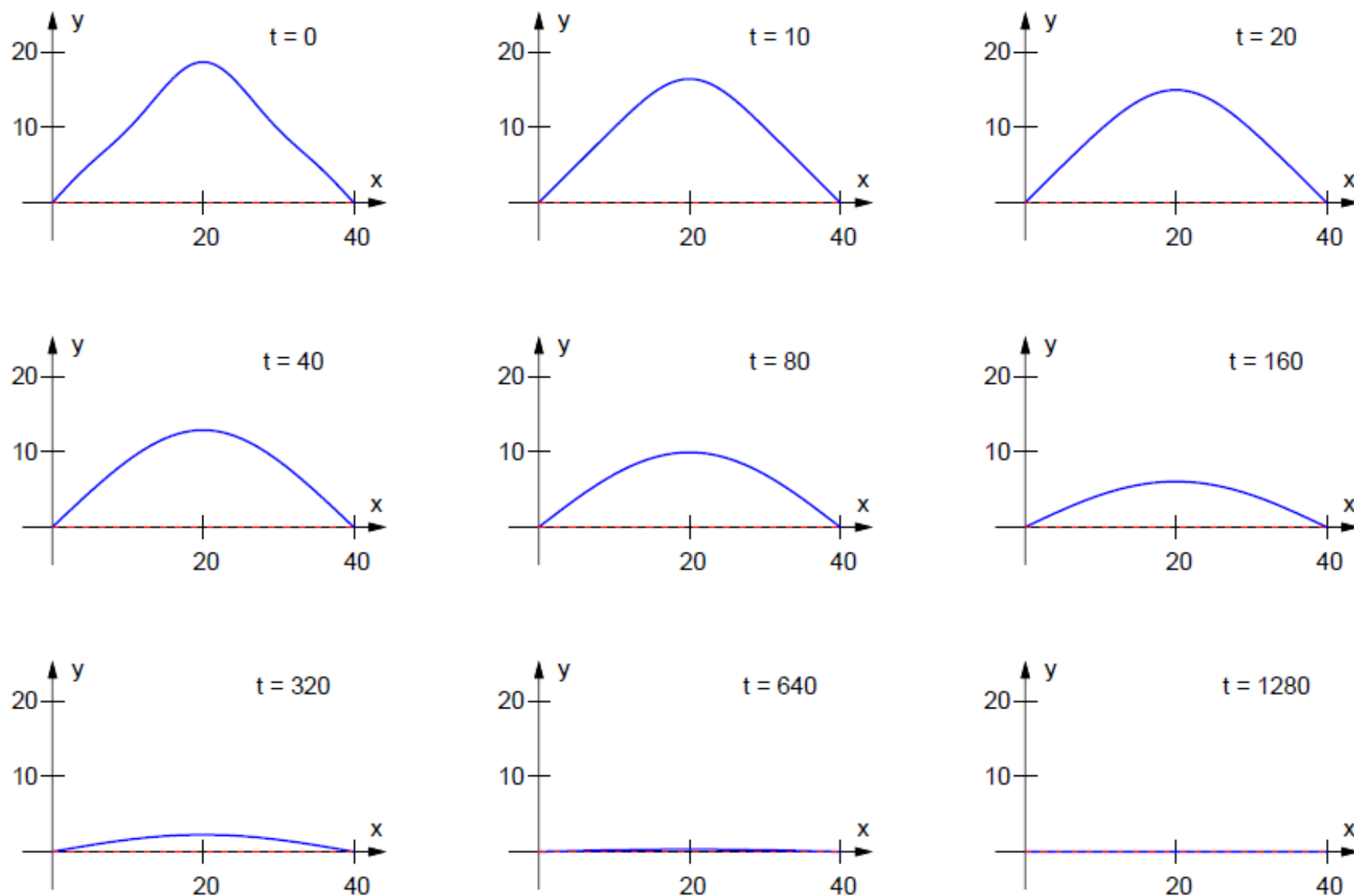


Figura 3.1 – Solução, $u(x, t)$, do PVIF do Exemplo 3.1 tomando apenas 3 termos não nulos da série.

EXERCÍCIO:

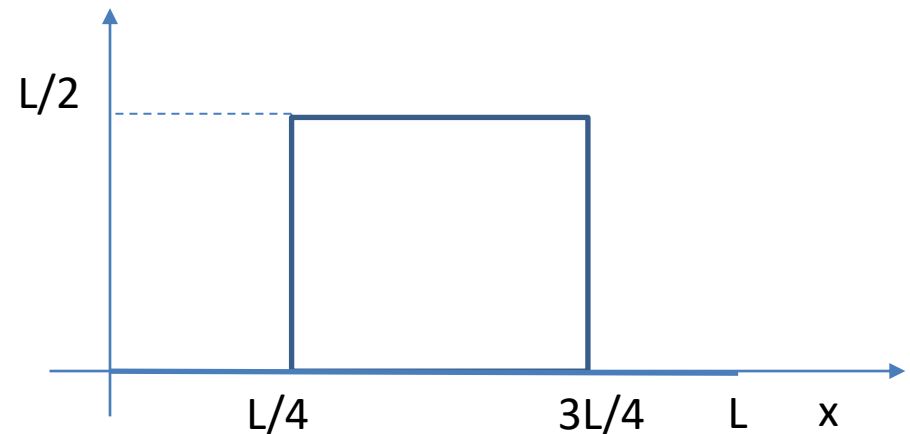
Encontre a solução para o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2 \end{cases}$$

com: $T_1 = T_2 = 0$, e $\alpha = 1$

E condição inicial

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < L/4 \\ \frac{L}{2}, & L/4 \leq x < 3L/4 \\ 0, & 3L/4 \leq x \leq L \end{cases}$$



Construa um script python para visualizar e verificar sua solução.

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- **Equação do calor transiente (parabólica)**
- Equação de Poisson (elíptica)
- Equação da onda (hiperbólica)