

AVULA MÊCANICA 23/09 ①

= ESTABILIDADE DE LIAPUNOV.

• SISTEMAS CONSERVATIVOS:

$$U: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}. \quad \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{3n}.$$

$(m_1, \dots, m_n)$ VETOR DE MASSAS $\mathbb{R}^n$.

$$\textcircled{1} \quad m_i \ddot{X}_i = - \frac{\partial U}{\partial X_i} \quad X_i \in \mathbb{R}^3$$

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA.

$$E: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{DADA POR.}$$

$$E(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \|\dot{x}_i\|^2}{2} + U(x).$$

↓
ENERGIA
POTENCIAL

$T(x)$
ENERGIA CINÉTICA

(2)

TEMOS
QUE, POR QUALQUER SOLUÇÃO,
É CONSTANTE SOBRE A SOLUÇÃO.

PONTOS DE EQUILÍBRIO (1).
SÃO PONTOS DA FORMA.

$$(X_0, 0) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \quad \text{É}$$

$$\frac{\partial U(X_0)}{\partial X_i} = 0 \quad \forall i$$

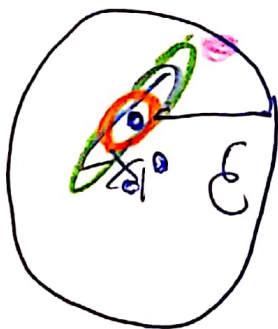
$$\nabla U(X_0) = 0.$$

- ESTABILIDADE DE LIAPUNOV DESTES PONTOS DE EQUILÍBRIO.
- REVAMOS O CONCEITO DE ESTABILIDADE DE LIAPUNOV

~~TEOREMA DE~~ DIRICHLET- LAGRANGE. (3)

SE x_0 É UM PONTO DE MÍNIMO ESTRITO LOCAL DE U , ENTÃO $(x_0, 0)$ É PONTO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL SEGUNDO LIA AUNAV.

IDEIA DA DEMONSTRAÇÃO: ENERGIA É UMA BARRICA
 $(x_0, 0)$ É PONTO DE MÍNIMO ESTRITO LOCAL P/ E .



$$A_1 = \min_{\|x_1 - x_0\| \geq \epsilon} E(x_1) > E(x_0, 0) = A_0$$

POR CONTINUIDADE, $\exists \delta > 0$ TAL QUE SE

$$\|(x_1, \dot{x}_1) - (x_0, 0)\| < \delta \Rightarrow$$

$$|E(x_1, \dot{x}_1) - E(x_0, 0)| < \underline{A_1 - A_0}.$$

⇒ ENERGIA DE SOLUÇÕES COMEÇANDO EM

$$B(x_0, 0) < A_1$$

■

INVERSÃO DO TEOREMA NEM
SEMPRE VALE.

(4)

EXEMPLO: PAINLEVE!

$$U(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

MOSTRE:

a) $U \in C^\infty$

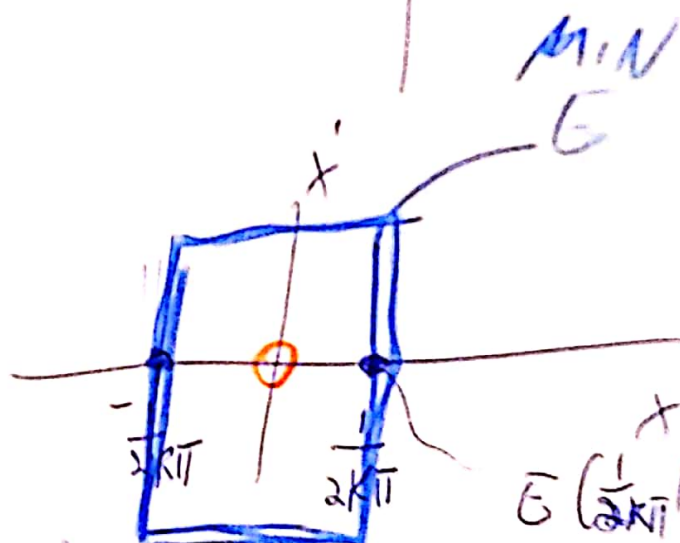
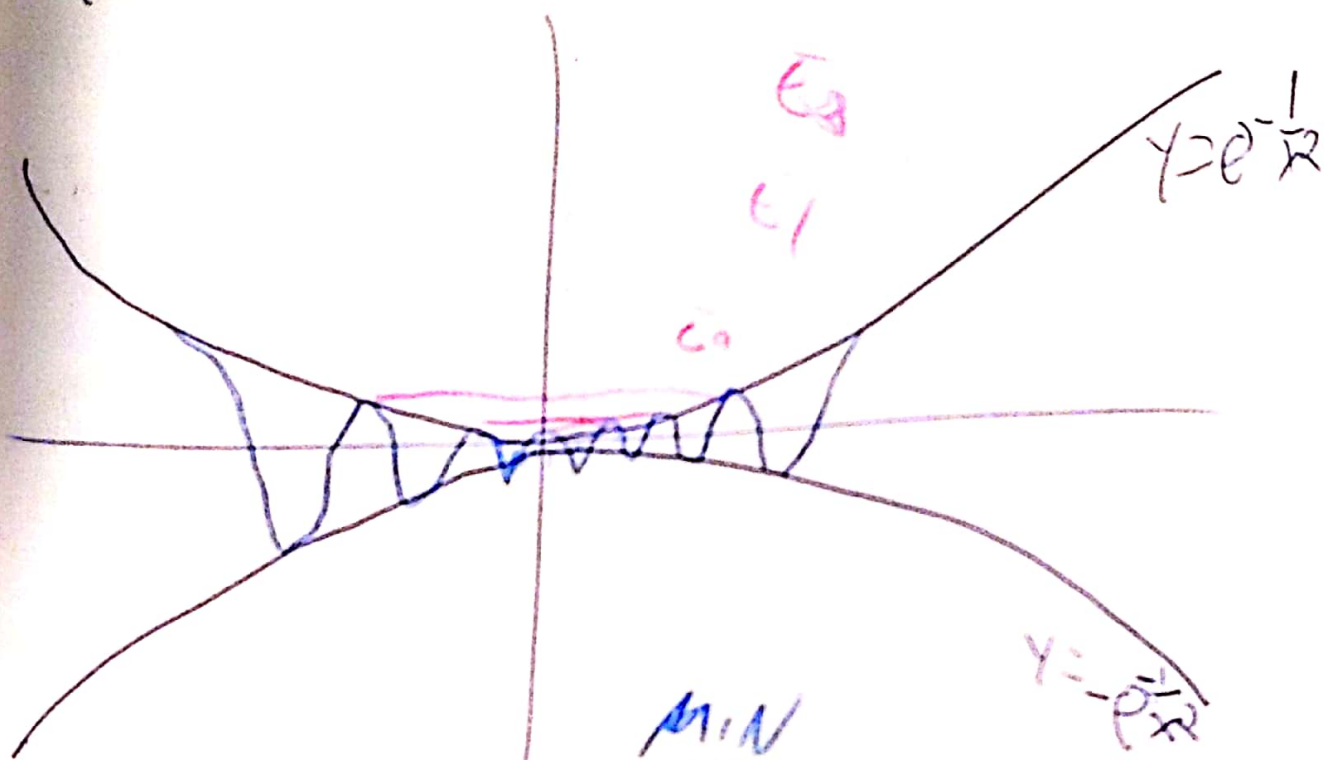
$$\frac{d^N U}{dx^N}(0) = 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

b) $(0,0)$ É EQUILÍBRIO ESTÁVEL DO
SISTEMA ~~de~~ MECÂNICO

$$\ddot{x} = - \frac{\partial U}{\partial x}(x).$$

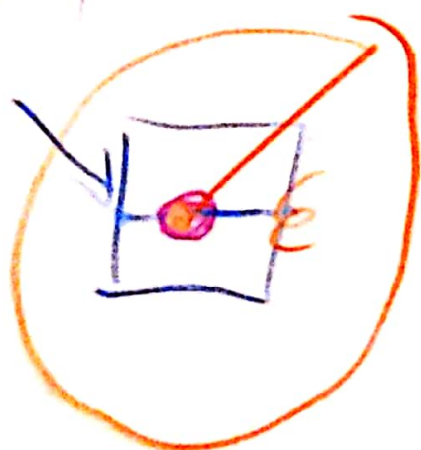
(5)

$|\bar{G}(A)|$



$$\bar{G}\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = e^{-\left(\frac{1}{2k\pi}\right)^2} > 0$$

$\frac{1}{(2k\pi)^2}$



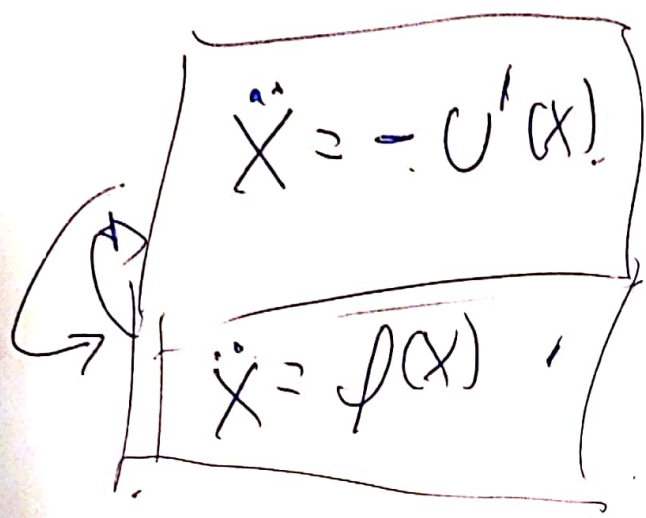
SISTEMAS UNIDIMENSIONAIS.

(6)

SISTEMAS C/ 1 GRAU DE
LIBERDADE

$$U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2.$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1$$


$$\ddot{x} = -U'(x)$$
$$\ddot{x} = f(x)$$

$$U(x) = - \int_0^x f(s) ds.$$

$$\text{ENERGIA TOTAL} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + U(x) = \bar{E}$$

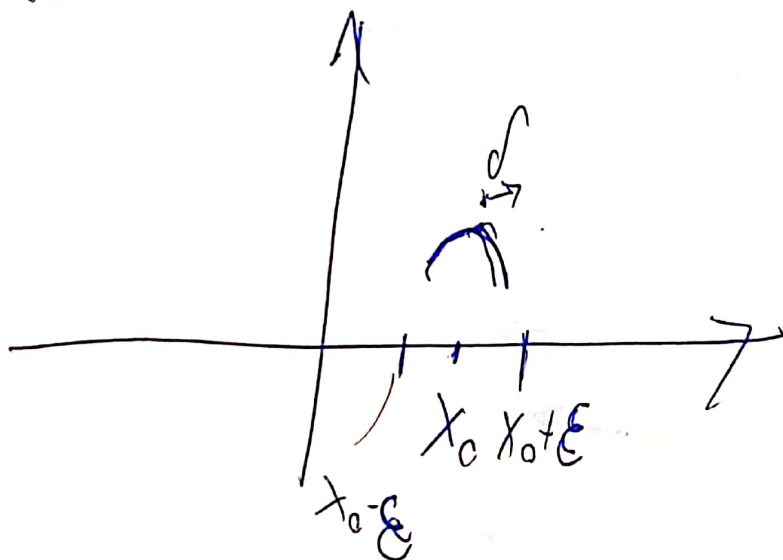
CONSERVADA.

Logo, conhecendo a energia ~~do~~ ^{E_0} sistema
e a posição podemos determinar o módulo
da velocidade de uma solução.

$$|\dot{x}| = \sqrt{2(E_0 - U(x))}$$

Proposição:

SE x_0 É PONTO DE MÁXIMA LOCAL
DE $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. ENTÃO O EQUILÍBRIO
 $(x_0, 0)$ É INSTÁVEL SEGUNDO
LIAPUNOV.



$$V(x) \leq V(x_0), \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon).$$

Tomando a solução C / condições
iniciais $x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = \delta$

temos que ~~$V(x(t)) - V(x_0) = \frac{1}{2} \delta^2 t^2 > 0$~~

$$E(x_0, \delta) - V(x_0) = \frac{1}{2} \delta^2 > 0.$$

(p)

SE $|x - x_0| < \epsilon$ ENTÃO NA SOLUÇÃO
COM AS CONDIÇÕES $(x_0, \dot{x}_0)$ INICIAIS

$$|\dot{x}(x)| \geq \sqrt{2 \cdot (E(x_0) - V(x))} \geq$$

$$\geq \sqrt{2 \cdot (U(x_0) + \frac{\dot{x}_0^2}{2} - V(x))} = \dot{x}_0$$

Logo, EXISTE $T_1 < \frac{\epsilon}{\dot{x}_0}$ TAL QUE

$$|x(T_1) - x_0| < \epsilon$$

VAMOS NOS FIXAR EM SISTEMAS
1 GRAU DE LIBERDADE.

$$\ddot{x} = f(x) \quad \left(\dot{x} = -V'(x) \right)$$

o COMPORTAMENTO DE TODAS AS

QUALITATIVO

SOLUÇÕES PODE

SER ENTENDIDO APENAS PELA ANÁLISE
DE V .

ESPAÇO DE FASE:

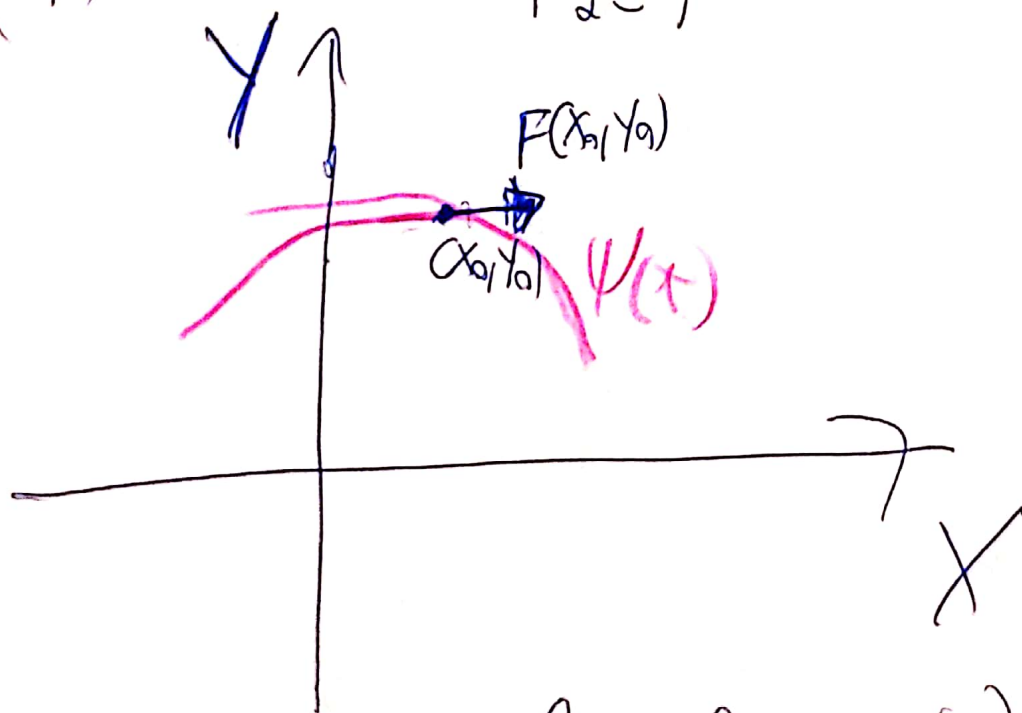
ESPAÇO DAS VARIÁVEIS $X, \dot{X} \rightarrow X, Y$

a) $\ddot{X} = f(X)$

b) $\begin{pmatrix} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = f(X) \end{pmatrix}$

SISTEMA
2 EDOs.
DE 1ª ORDEM
AUTÔNOMO.

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = F(X, Y). \quad F_1 = Y \\ F_2 = f(X).$$



DADA UMA SOLUÇÃO ~~(φ(x))~~ $\varphi(x)$ DE (a).

SOLUÇÃO $\psi(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \psi(x) = (\varphi(x), \varphi'(x))$

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + U(x)$$

$$\nabla E = (U'(x), \dot{x})$$

$$\nabla E = \vec{0}$$



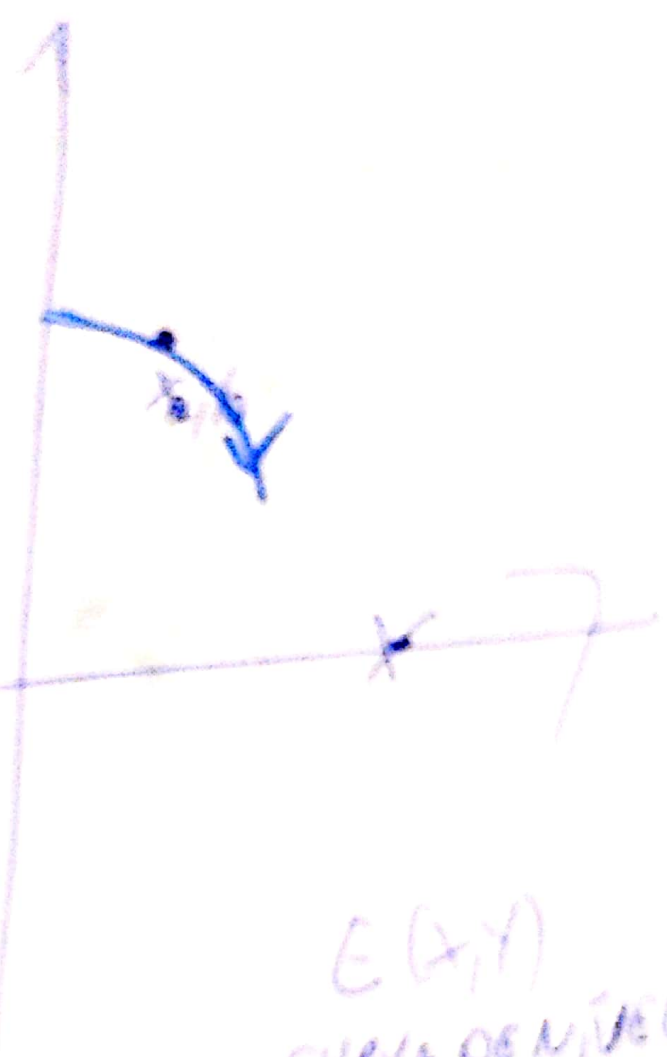
$$\dot{x}_0 = 0$$

$$U'(x_0) = 0$$

$$(x_0, \dot{x}_0) =$$

$$(x_0, 0)$$

x_0 é pto (Ritico) de U



$$E(x, y)$$

CURVA DE NÍVEL DE

$$E \text{ em } (x_0, y_0)$$

$$E = \tilde{E}(x_0, y_0)$$

SE $\nabla E(x_0, y_0) \neq \vec{0}$ TEMOS QUE
LOCALMENTE A CURVA DE NÍVEL É PERPENDICULAR

$$\nabla E =$$

EXEMPLO 5:

(11)

EXEMPLO 1 $V(x) = \frac{x^2}{2}$

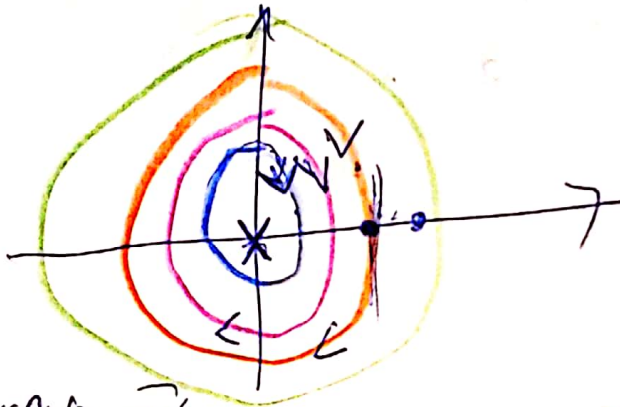
DESCREVE AS OSCILAÇÕES DE UM PÊNDULO

SISTEMA:

$$\ddot{x} = -x$$

SOLUÇÃO GERAL

$$x(t) = x_0 \cos(t) + \dot{x}_0 \sin(t)$$



$$E(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

OBSERVAÇÕES

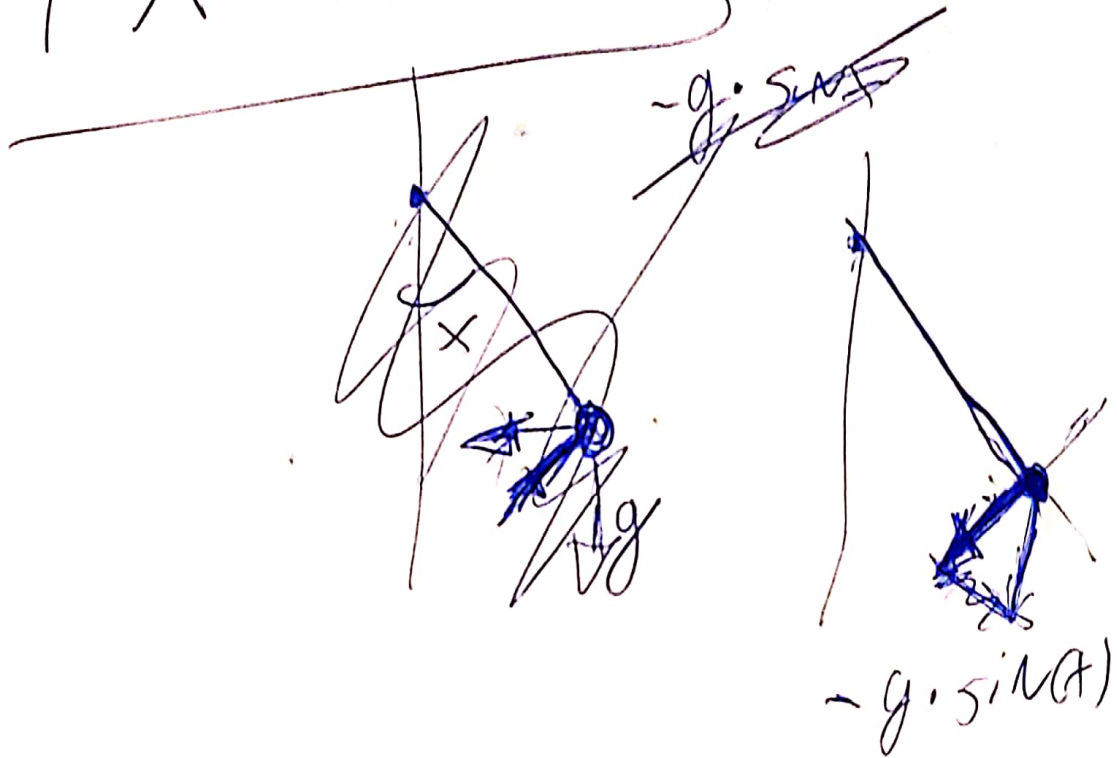
TODA SOLUÇÃO TEM o MESMO PERÍODO.

DEVERIA NOTAR ANTES: SE A CURVA DE NÍVEL DE E EM (x_0, y_0) É FECHADA. ENTÃO A SOLUÇÃO É PERIÓDICA.

(R)

EXEMPLO 2:

$$\ddot{X} = -\sin(X).$$



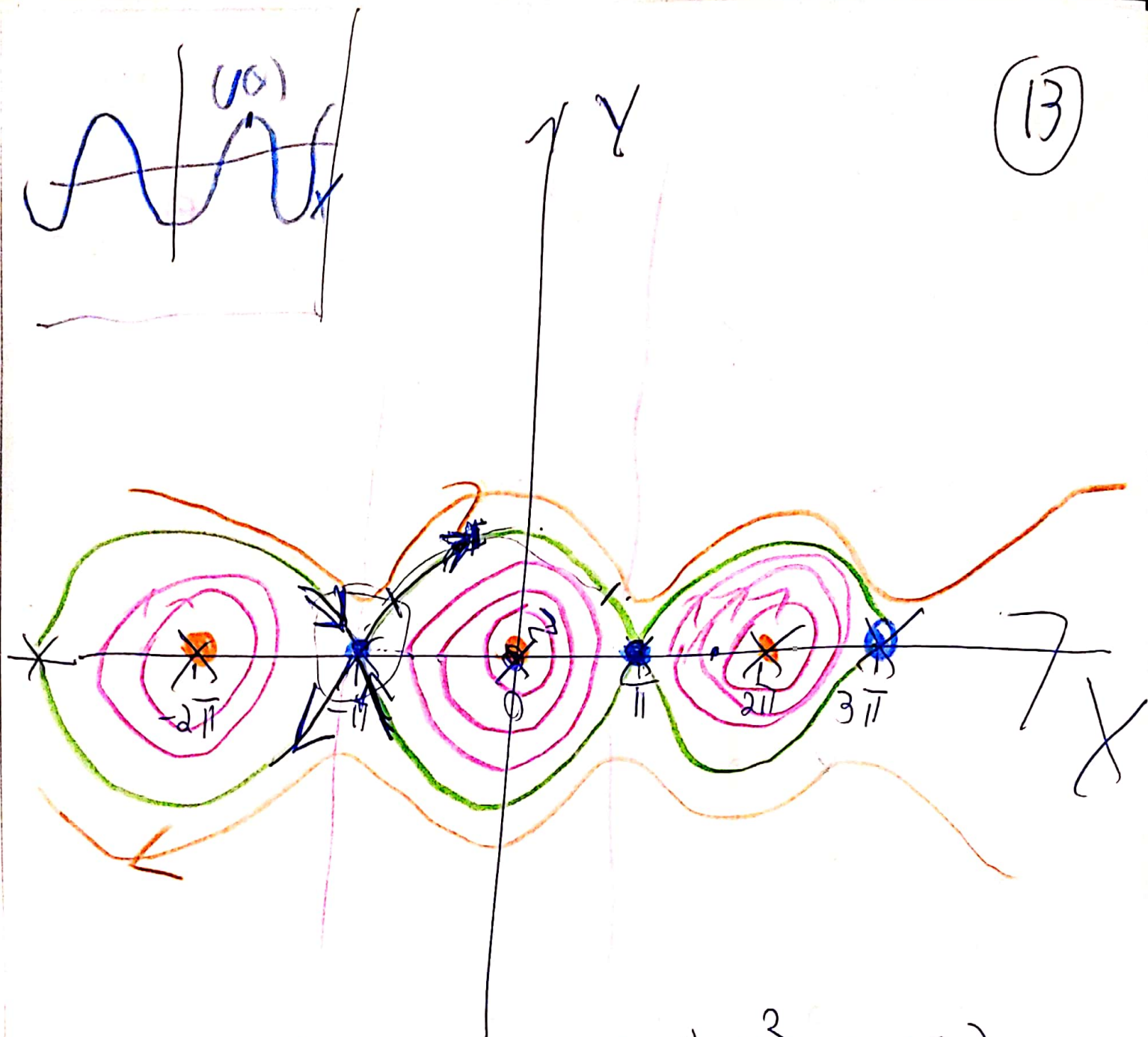
$$U(X) = -\cos(X) + C$$

PONTOS DE EQUILÍBRIO $(X_k, 0)$ ONDE.

$$X_k = k \cdot \pi$$

$$E(X) = \frac{\dot{X}^2}{2} - \cos(X).$$

(13)



CURVA DE NÍVEL
DE $E(X,Y) = 1$

$$E(X,Y) = \frac{Y^2}{2} - \cos(\alpha).$$

EM PARTICULAR, SE $X \neq \pi/2 + k\pi$

$$-1 < \cos(\alpha) < 1$$

$$E \text{ ~~Y~~ } Y_-^{(\alpha)} < Y_+^{(\alpha)}$$

TAL QUE $E(X, Y_-(\alpha)) =$
 $E(X, Y_+(\alpha)) = 1$

* PERÍODO DAS TRAJETÓRIAS PERTA DE
 $(0,0)$ É APROXIMADAMENTE 2π
 (Vou mostrar depois)

(14)

~~* PERÍODO DAS TRAJETÓRIAS QUANDO
 $1 - \mu < E < 1$ AS É APROXIMO~~

PROPOSIÇÃO: SE (x_0, y_0) É TAL QUE

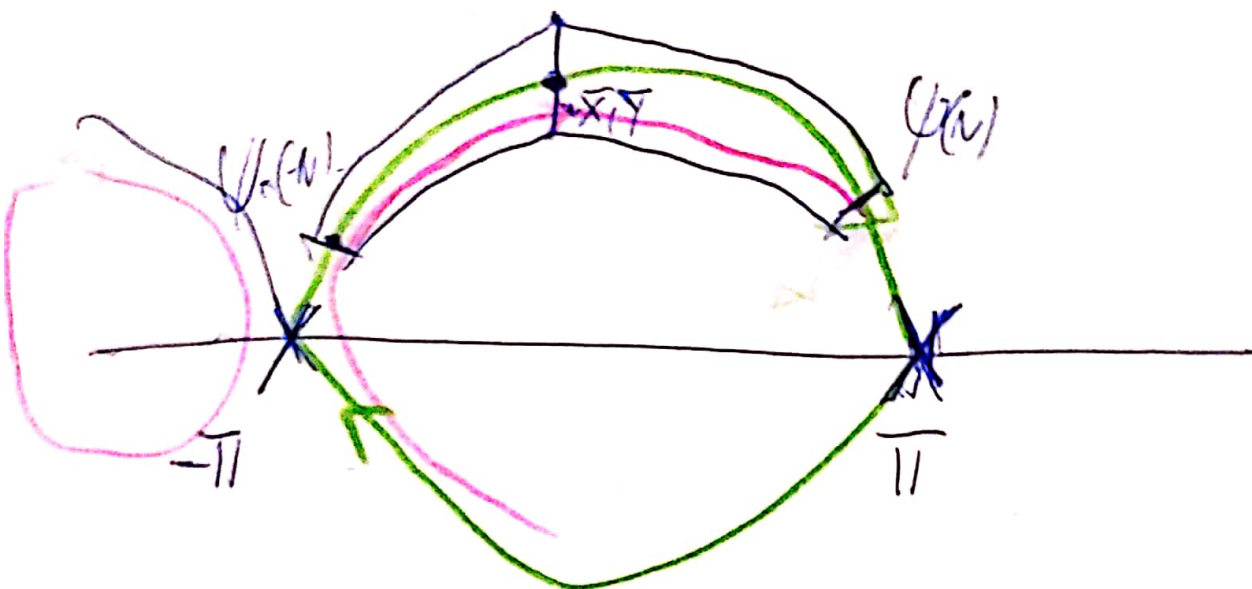
$1 - \mu < E(x_0, y_0) < 1$, ENTÃO A TRAJETÓRIA DA
 SOLUÇÃO QUE COMEÇA EM (x_0, y_0) É
 PERIÓDICA: ALÉM DISSO, SE

$T(x_0, y_0)$ É O PERÍODO DESTA TRAJETÓRIA,
 ENTÃO DADO $N > 0$, $\exists \delta > 0$ TAL QUE,
 SE $1 - \mu < E(x_0, y_0) < 1$, $T(x_0, y_0) > N$.

IDÉIA:

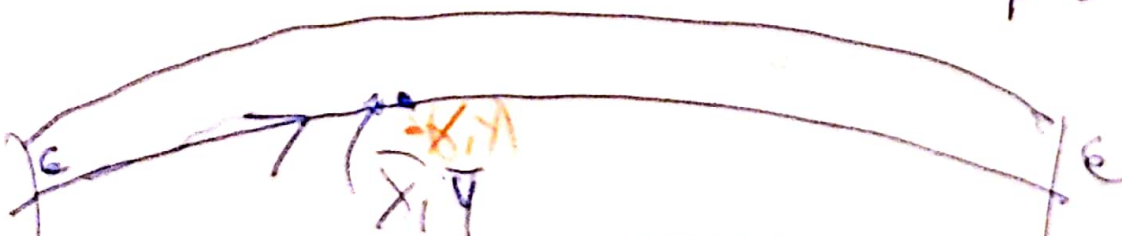
(15)

$$E=1$$



TEOREMA DO FLUXO TUBULAR LOUVO.

Se ψ a solução tal que $\psi(0) = (\bar{x}, \bar{y})$
 então dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, se $\|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta$
 e $\tilde{\psi}$ é a solução
 $\tilde{\psi}(0) = (x, y)$.



Então $\forall x \in [-N, N]$, $|\tilde{\psi}(x) - \psi(x)| < \epsilon$.

P/ A PRÓXIMA AULA

DESENHEM AS SOLUÇÕES QUANDO

(NO ESPAÇO E FASE)

(16)

$V(x)$

