Aula 3. Distribuição Exponencial (Exercícios).

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Distribuição Exponencial. Falta de memória.

Uma variável aleatória X não tem memória se

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t) \text{ para todos } s, t \geq 0.$$

Podemos reforçar essa propriedade? Seja Y uma variável aleatória qualquer. Supomos que v.a. X tem a propriedade de falta de memória. Podemos dizer que a relação

$$\mathbb{P}(X > Y + t \mid X > Y) = \mathbb{P}(X > t) \text{ para todos } t \geq 0.$$

continua valendo para X?

Distribuição Exponencial. Falta de memória.

$$\mathbb{P}(X > Y + t \mid X > Y) = \mathbb{P}(X > t) \text{ para todos } t \geq 0?$$

Observamos primeiro, que a v.a. Y não pode ser qualquer. Realmente, considere o caso $Y = X/2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > \frac{X}{2} + t \mid X > \frac{X}{2}) &= \mathbb{P}(X > \frac{X}{2} + t) = \mathbb{P}(\frac{X}{2} > t) \\ &\neq \mathbb{P}(X > t)\end{aligned}$$

Distribuição Exponencial. Falta de memória.

$$\mathbb{P}(X > Y + t \mid X > Y) = \mathbb{P}(X > t) \text{ para todos } t \geq 0?$$

Mas, se v.a. Y qualquer, mas independente de X, então, parece, que pode funcionar. Realmente, considere o caso Y com a densidade $f(y)$ (ou probabilidade, em caso discreto), e X e Y são independentes:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > Y + t \mid X > Y) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X > Y + t \mid X > Y, Y = y) f(y) dy \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(X > y + t \mid X > y) f(y) dy \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) f(y) dy = \mathbb{P}(X > t)
\end{aligned}$$

(da aula passada)

Distribuição Exponencial. Exemplo 5.2. *Suponha que você entrou numa estação de metrô para comprar uma passagem. A estação tem dois caixas na bilheteria, e ambos estão ocupados. Você comprará a passagem no primeiro caixa que ficar livre. Suponha que o tempo de compra de uma passagem para um passageiro tem distribuição exponencial. Qual é a probabilidade de você ser o último a sair dos caixas (existem três pessoas envolvidas, você e as duas pessoas que estão comprando os bilhetes nos caixas)?*

O raciocínio pode ser o seguinte. No momento que um caixa fica livre, seu tempo de compra e o tempo de compra para a outra pessoa que ainda está comprando a passagem, têm distribuições exponenciais, com o mesmo parâmetro (pelo propriedade de falta da memória). Por isso, a probabilidade de que você vai ser o último a sair dos caixas é igual a 1/2. □

Distribuição Exponencial. Exemplo 5.2. Cálculo formal. *Suponha que você entrou numa estação de metrô para comprar uma passagem. A estação tem dois caixas na bilheteria, e ambos estão ocupados. Você comprará a passagem no primeiro caixa que ficar livre. Suponha que o tempo de compra de uma passagem para um passageiro tem distribuição exponencial. Qual é a probabilidade de você ser o último a sair dos caixas?*

Seja T_1 o seu tempo de atendimento, e T_2, T_3 tempo de atendimento de duas pessoas que compram passagens nos caixas. T_1, T_2, T_3 são independentes com a mesma distribuição exponencial com taxa λ. A probabilidade, que queremos achar, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbb{P}\Big(T_1 > \max(T_2, T_3) - \min(T_2, T_3)\Big)$$

Distribuição Exponencial. Exemplo 5.2. Cálculo formal.

$$\mathbb{P}\Big(T_1 > \max(T_2, T_3) - \min(T_2, T_3)\Big) = ?$$

Denotamos $Z = \max(T_2, T_3) - \min(T_2, T_3)$. Observe, que T_1 e Z são independentes. Achamos a distribuição de Z usando $\mathbb{P}(Z > z)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z > z) &= \mathbb{P}\Big(\max(T_2, T_3) - \min(T_2, T_3) > z\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\max(T_2, T_3) - \min(T_2, T_3) > z \mid T_2 > T_3\Big)\mathbb{P}(T_2 > T_3) \\
&+ \mathbb{P}\Big(\max(T_2, T_3) - \min(T_2, T_3) > z \mid T_2 < T_3\Big)\mathbb{P}(T_2 < T_3) \\
&= \mathbb{P}\Big(T_2 > T_3 + z \mid T_2 > T_3\Big)\mathbb{P}(T_2 > T_3) \\
&+ \mathbb{P}\Big(T_3 > T_2 + z \mid T_2 < T_3\Big)\mathbb{P}(T_2 < T_3) \\
&= \mathbb{P}(T_2 > z) \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{P}(T_3 > z) \cdot \frac{1}{2} \\
&= e^{-\lambda z}.
\end{aligned}$$

Assim, $Z \sim \exp(\lambda)$.

Distribuição Exponencial. Exemplo 5.2. Cálculo formal.

$$\mathbb{P}\Big(T_1 > \max(T_2, T_3) - \min(T_2, T_3)\Big) = ?$$

Então sabemos que $Z \sim \exp(\lambda)$, e finalmente

$$\mathbb{P}\Big(T_1 > \max(T_2, T_3) - \min(T_2, T_3)\Big) = \mathbb{P}\Big(T_1 > Z\Big) = \frac{1}{2}.$$

formalmente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(T_1 > Z\Big) &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T_1 > Z \mid Z = z) f(z) dz = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T_1 > z) f(z) dz \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} \cdot \lambda e^{-\lambda z} dz = \int_0^{\infty} \lambda e^{-2\lambda z} dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} 2\lambda e^{-2\lambda z} dz = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

Convolução de exponenciais. Capítulo 5.2.4.

Sejam $X_i, i = 1, \ldots, n$ exponenciais com diferentes taxas λ_i respectivamente. A soma delas $X = \sum X_i$ chama-se variável aleatória *hypo-exponencial*. Consideramos $n = 2$.

$$
\begin{aligned}
f_{X_1+X_2}(t) &= \int_0^t f_{X_1}(s) f_{X_2}(t-s)\,ds = \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} \lambda_2 e^{-\lambda_2 (t-s)}\,ds \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t e^{-(\lambda_1-\lambda_2)s}\,ds = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \frac{\left(1 - e^{-(\lambda_1-\lambda_2)s}\right)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}
\end{aligned}
$$

Convolução de exponenciais. Capítulo 5.2.4. Consideramos $n = 3$.

$$f_{X_1+X_2+X_3}(t) = \int_0^t \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2 e^{-\lambda_2 s} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} \right) \lambda_3 e^{-\lambda_3 (t-s)} ds$$

$$= \lambda_3 e^{-\lambda_3 t} \int_0^t \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2 e^{-(\lambda_2 - \lambda_3) s} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 e^{-(\lambda_1 - \lambda_3) s} \right) ds$$

$$= \lambda_3 e^{-\lambda_3 t} \left[\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_3) t}}{\lambda_2 - \lambda_3} \right) + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_3) t}}{\lambda_1 - \lambda_3} \right) \right]$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} +$$

$$+ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{-\lambda_3 t} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i e^{-\lambda_i t} \prod_{j: j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

Convolução de exponenciais. Capítulo 5.2.4.

Logo, para $n \geq 1$ qualquer seguinte formula pode ser provada pela indução: seja $X = X_1 + \ldots + X_n$

$$f_X(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\lambda_i t} \left(\prod_{j:j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\lambda_i t} C_{i,n},$$

em que

$$C_{i,n} := \prod_{j:j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

Distribuição Exponencial. Exemplo 5.7. Seja $X_1, \ldots, X_m$ exponenciais independentes com diferentes taxas $\lambda_i, i = 1, \ldots, m$. Considere v.a. N independente de todos X_i com distribuição discreta e finita $\mathbb{P}(N = k) = p_k, \sum_{k=1}^{m} p_k = 1$. Considere seguinte v.a.

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Achamos a densidade:

$$\begin{aligned} f_Y(t) &= \sum_{n=1}^{m} f_Y(t \mid N = n) p_n = \sum_{n=1}^{m} f_{X_1 + \ldots + X_n}(t) p_n \\ &= \sum_{n=1}^{m} p_n \sum_{i=1}^{n} C_{i,n} \lambda_i e^{-\lambda_i t} \end{aligned}$$

Distribuição Exponencial. Exemplo 5.7. Interpretação.

Um item de produção de uma fábrica, passa pelo m estágios de formação (ou controle) em sequência. Mas em cada etapa $i, i = 1, \ldots, m$, existe a possibilidade de item sair do sistema (por vários motivos, por exemplo pelo defeito). Supondo que em cada etapa i o item passa o tempo exponencial com correspondente taxa λ_i independentemente dos outros exponenciais. Então Y é tempo que um item passa dentro do sistema.

References:

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models.* 6th edition, Academic Press, 1997.