MAT 0147: Cálculo II (T21-FEA-USP)

Curvas planas

Guia resumido

Setembro 2020

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. O GeoGebra http://www.geogebra.org (aqui utilizado) é uma ótima ferramenta, porém o aluno deve também tentar fazer as figuras na mão para compreende-las melhor.

Objetivo: Estudar curvas planas.

Elas aparecerão no curso como:

- curvas de nível (e.,g curvas indiferenças)
- curvas parametrizadas.

Curvas de nível

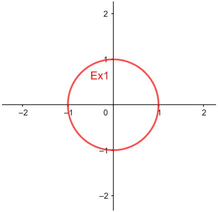
Def: Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função contínua e c um valor de g. Então

$$C = g^{-1}(c) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | g(x_1, x_2) = c\}$$

é chamado **curva de nível** (ou conjunto de nível).

Ex 1: Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

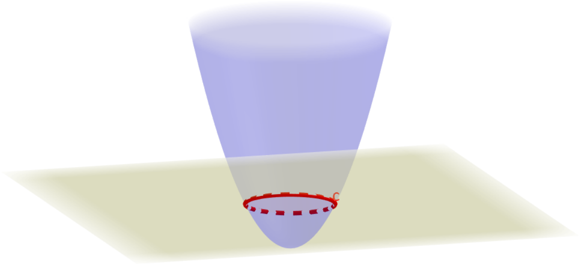


Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | g(x_1, x_2) = x_3\}$ o gráfico associado a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Então a curva de nível transladada para altura $x_3 = c$ é a interseção do plano $\{x_3 = c\}$ com o gráfico S.

Ex2: Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 = x_3\}$

$C = \{(x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 = 1\} = S \cap \{x_3 = 1\}$



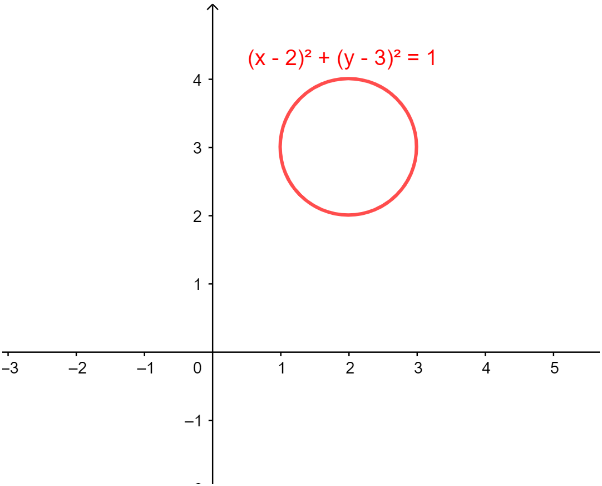
Obs: Uma curva de nível de uma função contínua $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ não precisa ser uma *curva regular*; veremos maiores detalhes na Parte 2 da matéria quando estudarmos o teorema de função implícita.
$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 0\}$

Ex 3: **Gráfico** associado a uma função $h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua é, como vimos em Calculo I, definido como:

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = h(x_1), x_1 \in I\}$$

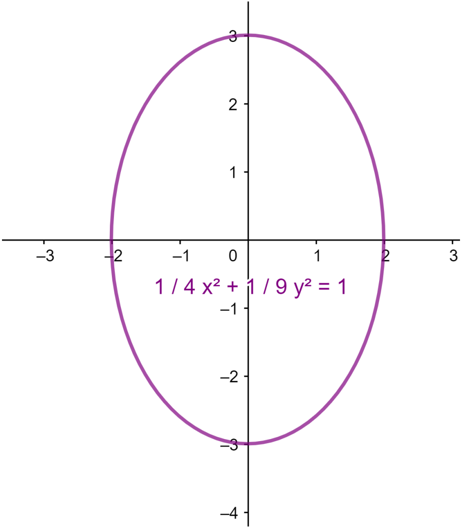
Ex 4: Círculo, posição geral

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 = r^2\}$$



Ex:5 Elipse

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{(x_1 - p_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - p_2)^2}{b^2} = 1\}$$



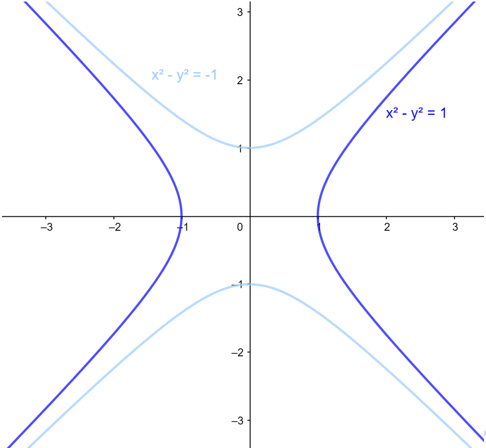
Obs: Uma elipse pode ser vista como **deformação** de um círculo. Por exemplo, seja $C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Então para $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $H(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2)$.

$$H(C_1) = C_2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} = 1\}$$

Ex 6: Hipérboles

$$C_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1\}$$

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = -1\}$$



Curva parametrizada

Def: Uma função contínua $\alpha : I \to \mathbb{R}^m$, definida como $\alpha(t) = (\alpha_1(t) \cdots, \alpha_m(t))$ é chamada **curva parametrizada**. A curva será de classe C^k se as suas funções componentes α_i são de classe C^k.

Ex 7: $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$\alpha(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$$

Ex 8: $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$\beta(t) = (3\cos(2t), 3\sin(2t))$$

Def: Dado uma curva paremetrizada $\alpha : I \to \mathbb{R}^m$, definida como $\alpha(t) = (\alpha_1(t) \cdots, \alpha_m(t))$ o vetor $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t) \cdots, \alpha_m'(t))$ é **vetor velocidade** e $\|\alpha'(t)\|$ é a **velocidade**.

Ex 7: $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como $\alpha(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$.
Então $\alpha'(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t))$, $\|\alpha'(t)\| = 3$

Ex 8: $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como $\beta(t) = (3\cos(2t), 3\sin(2t))$

Então $\beta'(t) = (-6\sin(2t), 6\cos(2t))$ e $\|\beta'(t)\| = 6$

Parametrizações dos exemplos básicos

Ex 3: Gráfico associado a uma função $h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = h(x_1), x_1 \in I\}$

$\alpha(t) = (t, h(t))$ onde $t \in I$.

Ex 4: Círculo

$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 = r^2\}$

$\alpha(t) = (r\cos(t) + p_1, r\sin(t) + p_2)$ onde $t \in [0, 2\pi]$

Ex 5: Elipse

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{(x_1-p_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2-p_2)^2}{b^2} = 1\}$$

$\alpha(t) = (a\cos(t) + p_1, b\sin(t) + p_2)$ onde $t \in [0, 2\pi]$.

Ex 6: Hipérbole

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, x_1 > 0\}$$

$\alpha(t) = (a\cosh(t), b\sinh(t))$ $t \in \mathbb{R}$.

Obs: Um dos problemas do T1 poderia também ser resolvido **alternativamente** utilizando parametrizações.

Problema

Sejam x_1 e x_2, respectivamente, quantidade (números reais não negativo) de mercadorias A e B consumidas por uma pessoa. Suponha que $R\$5,00$ e $R\$2,00$ são, respectivamente, os preços unitários (e.g., preço de 1 quilo) de A e B e que C seja o segmento de reta em $\mathbb{R}^2$ que descreve o espaço da quantidade das mercadorias, quando a despesa (orçamento) para mercadorias é $R\$7,00$. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida como $u(x) = \|x - (2,2)\|$. Determine ***o ponto*** *$p \in R$ tal que $u(p)$ assume o menor valor.*

Dica: Considere um vetor v tangente a reta orçamento (ex, $v = (-2, 5)$) e um ponto p_0 na reta orçamento (ex, $p_0 = (1, 1)$).

Escolha uma parametrizaccão da reta orçamento, i.e.,

$$\alpha(t) = p_0 + t.v$$

Obtenha o mínimo t_{min} da função $f(t) = u(\alpha(t))$ utilizando Calculo I e a geometria do problema (ou seja mesmo que domínio não seja fechado e limitado, voce sabe que haverá um minimo que realiza distância).

Temos então que $p = \alpha(t_{min})$.